09.02.2022

Zusammenfassung

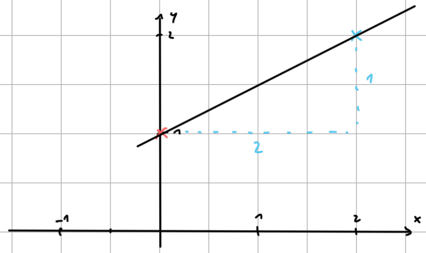
1. Funktionen und Schaubilder

1.1 Lineare Funktion / Gerade

$f(x) = m x + b$

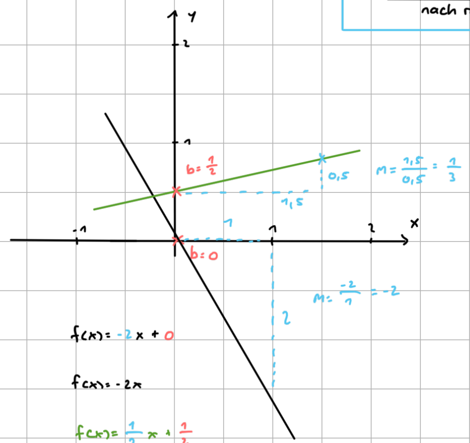
Steigung (m), y-Achsen-Abschnitt (b)

Bsp. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$



Bsp. Bestimme die Funktionsgleichung

$m = \frac{\text{nach oben / unten}}{\text{nach rechts}}$



$b = \frac{1}{2}$ $m = \frac{1,5}{0,5} = \frac{1}{3}$

$b = 0$ $m = \frac{-2}{1} = -2$

$f(x) = -2x + 0$

$f(x) = -2x$

$f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$

1.2 Quadratische Funktionen / Parabel

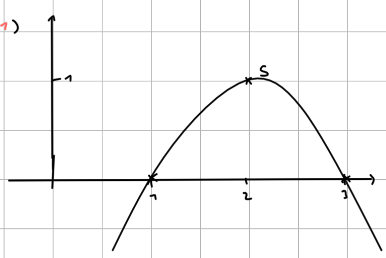
Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $a \hat{=}$ Öffnung

Scheitelform: $f(x) = a(x-b)^2 + c$ $a \hat{=}$ Öffnung $S(b \mid c)$

Nullstellenform: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ $a \hat{=}$ Öffnung Nullstellen $x = x_1$ und $x = x_2$

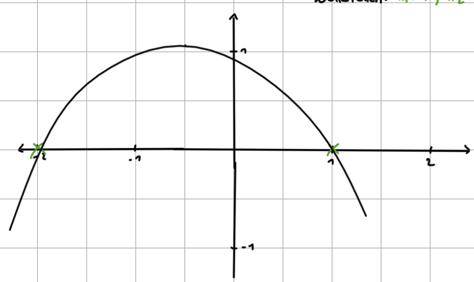
Bsp. $f(x) = -(x-2)^2 + 1$

$a = -1$ $S(2 \mid 1)$



Bsp. $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1) \cdot (x+2)$ Skizze

Nullstellen: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ $a = -\frac{1}{2}$ → nach unten geöffnet



1.3 Ganzrationale Funktionen / Polynome

3. Grades:

allgemein: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Punktsymm.: $f(x) = ax^3 + cx$

Nullstellenform: $f(x) = a \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3)$

4. Grades:

allgemein: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

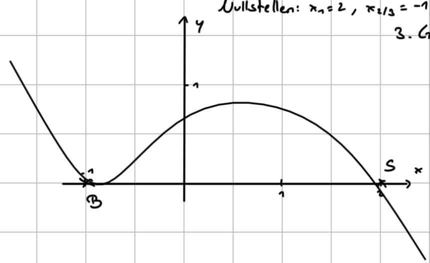
Punktsymm.: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Nullstellenform: $f(x) = a \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_4)$

Bsp. $f(x) = -(x-2) \cdot (x+1)^2$

Nullstellen: $x_1 = 2$, $x_{2/3} = -1$

3. Grades, VZ −



Arten von Nullstellen:

einfach: Schnittpunkt

doppelt: Berührpunkt

dreifach: Sattelpunkt

Verlauf:

Grad gerade

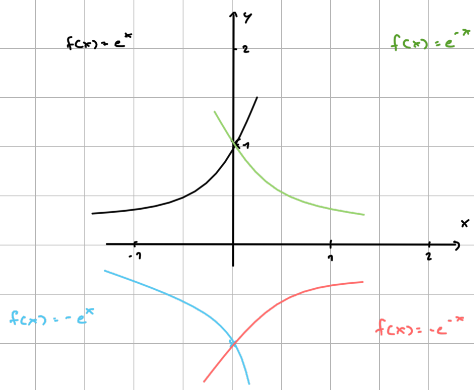
VZ + | VZ −

Verlauf:

Grad ungerade

VZ + | VZ −

1.4 Exponential Funktionen



VZ vor dem e:

+ –> oberhalb der Asym.

- –> unterhalb der Asym.

VZ vor dem x / im Exponent:

+ –> links an die Asym.

- –> rechts an die Asym.

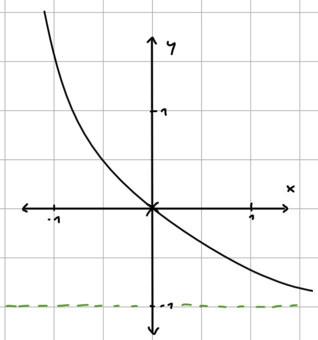
Die Asymptote ist der Teil der Funktion ohne e / Exponent.

Bsp. $f(x) = e^{-x} - 1$

Asymptote: $y = -1$

VZ vor e positiv: oberhalb der Asym.

VZ vor x ist negativ: rechts zur Asym.

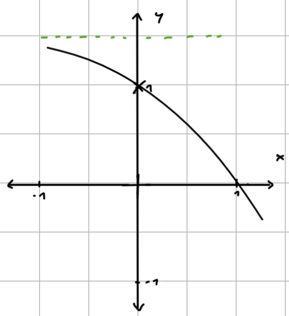


$f(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{3}{2}$

Asymptote: $y = \frac{3}{2}$

VZ vor e negative: unterhalb der Asym.

VZ vor x ist positiv: oberhalb der Asym.



Übungen:

1) $f(x) = 2e^x - 3$

2) $f(x) = -e^{-x} + 1{,}5$

3) $f(x) = e^x + 0{,}5$

4) $f(x) = -e^{-x} - x$

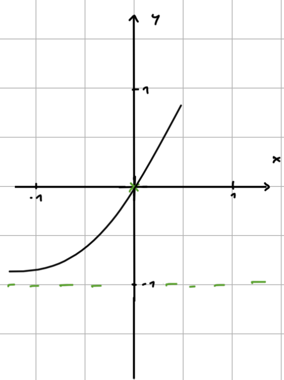
5) $f(x) = -e^x + 1 + \frac{1}{2}x$

1) $f(x) = 2e^x - 3$

Asymptote: $y = -3$

VZ vor e positiv: oberhalb der Asym.

VZ vor x ist positiv: links zur Asym.

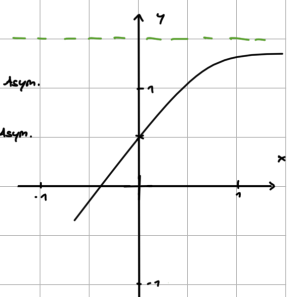


2) $f(x) = -e^{-x} + 1{,}5$

Asymptote: $y = 1{,}5$

VZ vor e negativ: unterhalb der Asym.

VZ vor x ist negativ: rechts zur Asym.

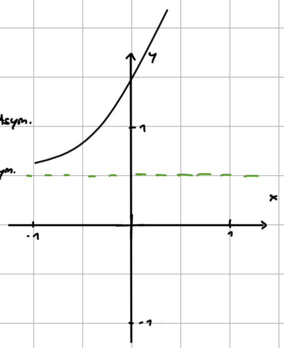


3) $f(x) = e^x + 0{,}5$

Asymptote: $y = 0{,}5$

VZ vor e positiv : oberhalb der Asym.

VZ vor x ist positiv : links zur Asym.



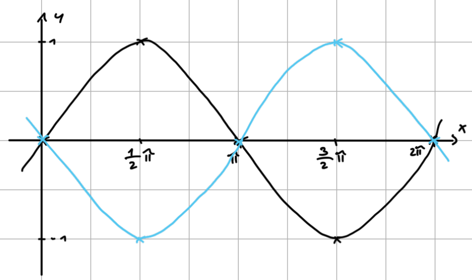
1.5 Trigonometrische Funktionen

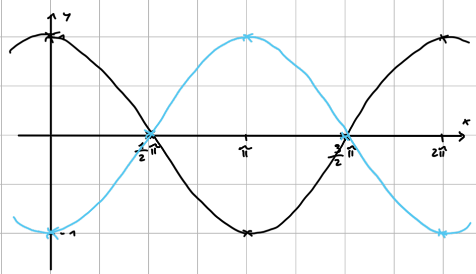
$f(x) = \sin(x)$

$f(x) = -\sin(x)$

$f(x) = \cos(x)$

$f(x) = -\cos(x)$





Allgemeine Funktionsgleichung:

$f(x) = a \cdot \sin(k(x-c)) + d$

Amplitude : $|a|$ (Streckung in y-Richtung)

Periode $p: \frac{2\pi}{k}$ (Streckung in x-Richtung)

Verschiebung in x-Richtung

Mittellinie (Verschiebung in y-Richtung)

Bsp. $f(x) = -1{,}5 \cos(\frac{1}{2}\pi(x-1)) + 1$

Mittellinie: $y = 1$

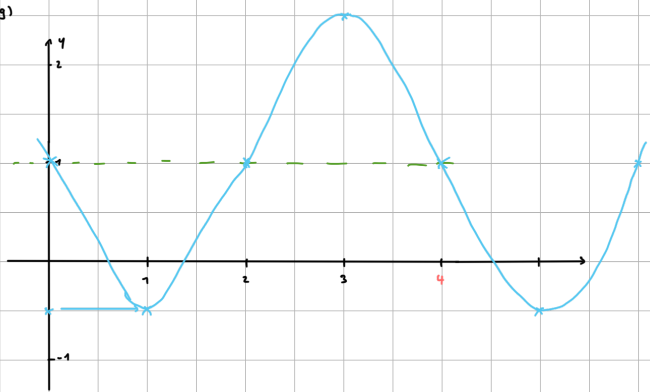
Amplitude: $|a| = 1{,}5$

Periode: $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

Versch. in x-R.: 1

Grundfunktion: $-\cos(x)$

Wertebereich: $[-0{,}5 ; 2{,}5]$



Übungen:

1) $f(x) = 2\sin(2x) + 1$

2) $f(x) = -1{,}5 \sin(\pi x) - 1{,}5$

3) $f(x) = 0{,}5 \cos(2\pi(x-0{,}5)) + 1$

4) $f(x) = -\cos(\frac{1}{10}(x - 2{,}5\pi)) - 0{,}5$

1) $f(x) = 2\sin(2x) + 1$

Mittellinie: $y = 1$

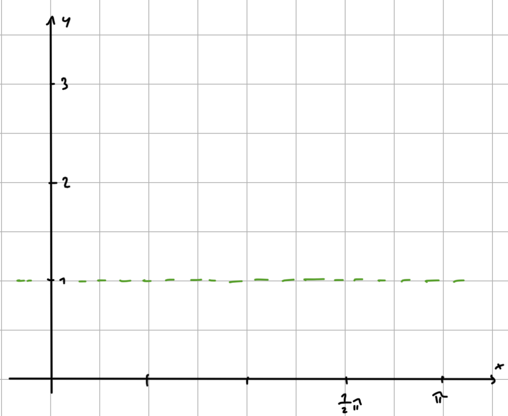
Amplitude: $|a| = 2$

Periode: $p: \frac{2\pi}{2} = \pi$

Versch. in x-R.: -

Grundfunktion: $\sin(x)$

Wertebereich: $[1 ; 3]$



16.02.2022

2. Gleichungen

2.1 Polynomgleichungen

Reine Potenzgleichung

(nur eine Potenz von x):

Bsp. $2x^3+2=0 \quad |-2$

(1) nach Potenz von x auflösen

$2x^3=-2 \quad |:2$

$x^3=-1 \quad |\sqrt[3]{\ }$

(2) Wurzel ziehen

$x=-1$

Beachte: bei gerader Wurzel

$\sqrt{+} \rightarrow \pm; \ \sqrt{-} \rightarrow$ ↯

bei ungerader Wurzel

$\sqrt{+} \rightarrow +; \ \sqrt{-} \rightarrow -$

Gemischt quadratisch

(x^2; x; Zahl)

Bsp. $-x^2+4x-3=0$

(1) MNF

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot(-3)}}{2\cdot(-1)}$$

$$=\frac{-4\pm 2}{-2}$$

$x_1=1 \qquad x_2=3$

„Nur Terme mit x"

Bsp. $2x^4-8x^2=0$

(1) Ausklammern

(die kleinste Potenz)

$x^2\cdot(2x^2-8)=0$

(2) S.v.N

$\swarrow$ $x_{1/2}=0$

$\searrow$ $2x^2-8=0 \quad |+8$

$2x^2=8 \quad |:2$

$x^2=4 \quad |\sqrt{\ }$

$x_{3/4}=\pm 2$

„x^4, x^2, Zahl"

Bsp. $2x^4-6x^2+4=0$

(1) Sub. $x^2=u$

$2u^2-6u+4=0$

(2) MNF

$$u_{1/2}=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}$$

$u_1=1 \qquad u_2=2$

(3) Resub.

$x^2=1 \quad |\sqrt{\ } \qquad x^2=2 \quad |\sqrt{\ }$

$x_{1/2}=\pm1 \qquad x_{3/4}=\pm\sqrt{2}$

Übungen:

1. $-2x^2+32=0$
2. $-x^2-4x+5=0$
3. $-2x^4+3x^3=0$
4. $x^4+x^2-2=0$
5. $2x^3-16=0$
6. $x^2=7x-12$
7. $2x^4=-54x$
8. $x^2+15=2x^4$
9. $x^5-x^4=-3x^3-x^4+4x$

1. $-2x^2+32=0 \quad |-32$

$-2x^2=-32 \quad |\cdot(-1)$

$2x^2=32 \quad |:2$

$x^2=16 \quad |\sqrt{\ }$

$x=\pm4$

2. $-x^2-4x+5=0$

$$x_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot(-1)\cdot5}}{2\cdot(-1)}$$

$x_1=-5 \qquad x_2=1$

3. $-2x^4+3x^3=0$

$x^3\cdot(-2x+3)=0$

$\swarrow$ $x_{1/2/3}=0$

$\searrow$ $-2x+3=0 \quad |-3$

$-2x=-3 \quad |\cdot(-1)$

$2x=3 \quad |:2$

$x_4=1{,}5$

4. $x^4+x^2-2=0$

$x^2=u$

$u^2+u-2=0$

$$u_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}$$

$u_1=1 \qquad u_2=-2$

$x^2=1 \quad |\sqrt{\ } \qquad x^2=-2 \quad \sqrt{\ }$

$x_{1/2}=\pm1 \qquad x_{3/4}=$ ↯

5. $2x^3-16=0 \quad |+16$

$2x^3=16 \quad |:2$

$x^3=8 \quad |\sqrt[3]{\ }$

$x=\pm2$

6. $x^2=7x-12 \quad |-x^2$

$-x^2+7x-12=0$

$$x_{1/2}=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot(-1)\cdot(-12)}}{2\cdot(-1)}$$

$x_1=3 \qquad x_2=4$

7. $2x^4=-54x \quad |+54x$

$2x^4+54x=0$

$x\cdot(2x^3+54)=0$

$\swarrow$ $x=0$

$\searrow$ $2x^3+54=0 \quad |-54$

$2x^3=-54 \quad |:2$

$x^3=-27 \quad |\cdot(-1)$

$x^3=27 \quad |\sqrt[3]{\ }$

$x_{1/2}=\pm3$

21.02.2022

2.2 Exponentialgleichungen

Reine Exp.-Gl.

(nur ein Term mit e)

Bsp. $2e^{-2x} - 7 = 0$

① nach e auflösen

$2e^{-2x} = 7 \quad | :2$

$e^{-2x} = \frac{7}{2} \quad | \ln(\cdot)$

② ln(·) anwenden

$-2x = \ln(\frac{7}{2})$

③ nach x auflösen

$x = \frac{\ln(\frac{7}{2})}{-2}$

„nur Terme mit e^x"

Bsp. $2e^{5x} - 3e^{2x} = 0$

① Ausklammern (kleinste HZ)

$e^{2x} \cdot (2e^{3x} - 3) = 0$

↯

$2e^{3x} - 3 = 0 \quad | +3$

$2e^{3x} = 3 \quad | :2$

② S.v.N $\quad e^{3x} = \frac{3}{2} \quad | \ln()$

$3x = \ln(\frac{3}{2}) \quad | :3$

$x = \frac{\ln(\frac{3}{2})}{3}$

„e^{2x}, e^x und Zahl"

Bsp. $e^{2x} - 7e^x + 6 = 0$

① Substitution : $e^x = u$

$u^2 - 7u + 6 = 0$

② MNF: $\frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$

$u_1 = 6 \qquad u_2 = 1$

③ Resub.

$e^x = 6 \quad | \ln() \qquad e^x = 1 \quad | \ln()$

$x_1 = \ln(6) \qquad x_2 = \ln(1) = 0$

Übungen:

1) $3 - 4e^{x-1} = 0$

2) $4e^{3x} - 2e^x = 0$

3) $-e^{2x} + 3e^x - 2 = 0$

4) $-2e^{-3x} - 1 = 0$

5) $3e^{2x} - e^x = 0$

6) $-\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}e^x = -2$

7) $e^{4x} = 3e^{-2x}$

8) $e^{3x} + e^{2x} = 2e^x$

1) $3 - 4e^{x-1} = 0 \quad | -3$

$-4e^{x-1} = -3 \quad | :(-4)$

$e^{x-1} = \frac{3}{4} \quad | \ln()$

$x - 1 = \ln(\frac{3}{4}) \quad | +1$

$x = \ln(\frac{3}{4}) + 1$

2) $4e^{3x} - 2e^x = 0$

$e^x \cdot (4e^{2x} - 2) = 0$

↯

$4e^{2x} - 2 = 0 \quad | +2$

$4e^{2x} = 2 \quad | :4$

$e^{2x} = \frac{2}{4} \quad | \ln()$

$2x = \ln(\frac{2}{4}) \quad | :2$

$x = \frac{\ln(\frac{2}{4})}{2}$

3) $-e^{2x} + 3e^x - 2 = 0$

Substitution : $e^x = u$

$-u^2 + 3u - 2 = 0$

$\frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)}$

$u_1 = 1 \qquad u_2 = 2$

Resub.

$e^x = 1 \quad | \ln() \qquad e^x = 2 \quad | \ln()$

$x_1 = \ln(1) = 0 \qquad x_2 = \ln(2)$

4) $-2e^{-3x} - 1 = 0 \quad +1$

$-2e^{-3x} = 1 \quad | :(-2)$

$e^{-3x} = -\frac{1}{2} \quad | \ln()$

$-3x = \ln(-\frac{1}{2}) \quad | :(-3)$

$x = \ln(-\frac{1}{2}) - 3$

5) $3e^{2x} - e^x = 0$

$e^x \cdot (3e^x - 1) = 0$

↯

$3e^x - 1 = 0 \quad | +1$

$3e^x = 1 \quad | :3$

$e^x = \frac{1}{3} \quad | \ln()$

$x = \ln(\frac{1}{3})$

6) $-\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}e^x = -2$

2.3. Trigonometrische Gleichungen

$\cos(x) = \frac{1}{2}$ auf $I = [-\pi ; 3\pi]$

① $x_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\pi$

② über Sym: $x_2 = 2\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$

③ weitere Lösungen nach rechts:

$x_3 = \frac{1}{3}\pi + 2\pi = \frac{7}{3}\pi$

$\left(x_4 = \frac{5}{3}\pi + 2\pi = \frac{11}{3}\pi \right)$

④ weitere Lösungen nach links:

$\left(x_1 = \frac{1}{3}\pi - 2\pi = -\frac{5}{3}\pi \right)$

$x_0 = \frac{5}{3}\pi - 2\pi = -\frac{1}{3}\pi$

Übungen:

1) $\sin(x) = \frac{1}{2}$ auf $I = [-\pi ; 3\pi]$

2) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ auf $I = [0 ; 4\pi]$

3) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ auf $I = [-\pi ; 3\pi]$

4) $\sin(\pi x) = 1$ auf $I = [0 ; 4]$

1) $\sin(x) = \frac{1}{2}$ auf $I = [-\pi ; 3\pi]$

$x_1 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\pi$

$x_2 = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$

$x_3 = \frac{1}{6}\pi + 2\pi = \frac{13}{6}\pi$

$x_4 = \frac{5}{6}\pi + 2\pi = \frac{17}{6}\pi$

$x_5 = \frac{13}{6}\pi + 2\pi = \frac{25}{6}\pi$

$\left(x_1 = \frac{1}{6}\pi - 2\pi = -\frac{11}{6}\pi \right)$

2) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ auf $I = [0 ; 4\pi]$

$x_1 = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$

$x_2 = 2\pi - \frac{3}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi$

$x_3 = \frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{11}{4}\pi$

$x_4 = \frac{5}{4}\pi + 2\pi = \frac{13}{4}\pi$

$\left(x_5 = \frac{11}{4}\pi + 2\pi = \frac{19}{4}\pi \right)$

$\left(x_1 = \frac{3}{4}\pi - 2\pi = -\frac{5}{4}\pi \right)$

3) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ auf $I = [-\pi ; 3\pi]$

$x_1 = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}\pi$

$x_2 = \pi - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6}\pi$

$x_3 = -\frac{1}{6}\pi + 2\pi = \frac{11}{6}\pi$

$\left(x_4 = \frac{7}{6}\pi + 2\pi = \frac{19}{6}\pi \right)$

$\left(x_1 = -\frac{1}{6}\pi - 2\pi = -\frac{13}{6}\pi \right)$

Gleichungen der Form sin(kx) = z:

Bsp. $\sin(3x) = \frac{1}{2}$ auf $I = [0 ; \pi]$

① $3x_1 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\pi$

② $3x_2 = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$

③ $3x_3 = \frac{1}{6}\pi + 2\pi = \frac{13}{6}\pi$

$3x_4 = \frac{5}{6}\pi + 2\pi = \frac{17}{6}\pi$

$3x_5 = \frac{13}{6}\pi + 2\pi = \frac{25}{6}\pi$

$3x_6 = \frac{17}{6}\pi + 2\pi = \frac{29}{6}\pi$

④ $3x_{-1} = \frac{1}{6}\pi - 2\pi = -\frac{11}{6}\pi$

$3x_0 = \frac{5}{6}\pi - 2\pi = -\frac{7}{6}\pi$

$\Big|\ :3$

⑤ $\boxed{x_1 = \frac{1}{18}\pi \quad x_2 = \frac{5}{18}\pi \quad x_3 = \frac{13}{18}\pi \quad x_4 = \frac{17}{18}\pi}$

$\left(x_5 = \frac{25}{18}\pi \quad x_6 = \frac{29}{18}\pi \right)$

$\left(x_{-1} = -\frac{11}{18}\pi \quad x_0 = -\frac{7}{6}\pi \right)$