

Ebenen

Parameterform: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalengleichung: $E: (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$

Koordinatengleichung: $E: ax + by + cz = d; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{n}$

Dreipunktgleichung: $E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + s \cdot (\vec{c} - \vec{a})$

Achsenabschnittsform: $E: \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$

↳ A, B, C = Achsenabschnitte
von E

Parameterform → Normalengleichung: Bestimmung des Normalenvektors (Kreuzprodukt der Richtungsvektoren)

↳ Stützvektor übernehmen, Normalenvektor hinten einsetzen

Normalengleichung → Parametergleichung: Bestimmung der RV-en: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ mit Normalenvektor

↳ Stützvektor übernehmen

Normalengleichung → Koordinatengleichung: Normalengleichung in vereinfachte Form: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
 $\Rightarrow \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

Koordinatengleichung → Normalengleichung: linke Seite als Skalarprodukt: Bsp. $E: 3x + 2y + z = 12 \Rightarrow E: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 12$

↳ geeigneter Stützvektor z.B. $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

LAGE: Gerade & Ebene:

g kann parallel zu E, in der Ebene liegen oder sich genau in einem Punkt schneiden

↳ parallel: RV der Geraden & Normalenvektor orthogonal zueinander sind / RV von g & E komplanar sind

↳ g in E: wenn g parallel zu E & wenn Stützvektor in E

↳ Schnittpunktberechnung: E in Koordinatenform / Normalform → allgemeinen Koordinaten von g in E (Punktprobe)

Ebene & Ebene:

E_1 & E_2 können echt parallel / identisch oder in einer Schnittgeraden g schneiden

↳ parallel: Normalenvektor von E_1 & E_2 kollinear oder $\vec{n}$ von E_1 orthogonal zu beiden RV von E_2

↳ identisch: parallel und Stützvektor von E_1 auch auf E_2 liegt (Punktprobe)

↳ Schnittgerade: E_1 in Parameterform & E_2 in Koordinatenform / Normalform → allg. Koordinatenform von E_1 in E_2

Ein Punkt liegt im Dreieck ABC wenn:

▶ P liegt auf Ebene $E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + s \cdot (\vec{c} - \vec{a})$

▶ Parameterwerte r und s: $0 \leq r \leq 1, 0 \leq s \leq 1, 0 \leq r + s \leq 1$

Ein Punkt P liegt im Parallelogramm ABCD wenn:

▶ P liegt in der Ebene (siehe oben)

▶ $0 \leq r \leq 1, 0 \leq s \leq 1$

Winkelberechnung

allgemeine Winkelberechnung:



$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Winkel zwischen zwei Geraden:



$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + r \cdot \vec{v}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Winkel zwischen zwei Ebenen:



$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}$$

Winkel zwischen Gerade & Ebene:



$$E: (\vec{x} - \vec{e}) \cdot \vec{n} = 0$$

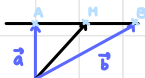
$$h: \vec{x} = \vec{b} + r \cdot \vec{v}$$

$$\cos \beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|}$$

MITTELWERT:



Mittelwert:

$$\vec{x} = \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{AB}$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{AB}$$

LAGEBEZIEHUNG:

I Punkt & Ebene $\rightarrow$ Punktprobe mit Parameterform

$\hookrightarrow$ Punkt mit Ebene gleichsetzen

$$\text{Bsp.: } P(1|1|1), E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

P = E

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Gleichungssystem aufstellen

$$\text{I. } r + 3s = 0$$

$$\text{II. } 2r + 2s = 1$$

$$\text{III. } 3r + s = 0$$

$\hookrightarrow$ Auflösen nach r & s $\rightarrow$ wenn lösbar $\Rightarrow$ P liegt in E, wenn Widerspruch $\Rightarrow$ P liegt nicht in E

I Punkt & Ebene $\rightarrow$ Punktprobe mit Koordinatenform

$\hookrightarrow$ Punkt einsetzen in Ebene für x/y/z

$$\text{Bsp.: } P(2|-2|-1), E: 2x + y - 3z = 5$$

P in E:

$$\text{c.s. } 2 \cdot 2 + (-2) - 3 \cdot (-1) = 5 \rightarrow \text{wenn wahre Aussage, dann liegt P in E}$$

$$\text{c.s. } 4 - 2 + 3 = 5 \rightarrow \text{wenn Widerspruch, dann liegt P nicht in E}$$

$$\text{c.s. } 5 = 5$$

Lagebeziehungen

I. Punkt & Ebene → Punktprobe mit Normalenform

↳ Punkt in E einsetzen

Bsp.: $P(1|1|0)$; $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

P in E:

$$E: \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = -2 \neq 0$$

→ wenn wahre Aussage, dann liegt P in E

→ wenn Widerspruch, dann liegt P nicht in E

II. Gerade & Ebene schneiden sich

↳ Ebene in Koordinatenform umwandeln

↳ die Terme von g in E (x/y/z) einsetzen

↳ man bekommt r raus → einsetzen in g

↳ Schnittpunkt s

für graphische Darstellung:

→ Berechnung der drei Achsenabschnitte

→ g durch zwei ihrer Punkte

(z.B. Stützvektor & Schnittpunkt)

III. Gerade parallel zur Ebenen/Geraden in Ebene:

↳ g in E

↳ E in Koordinatenform:

Bsp.: $E: x + 2y + 3z = 9$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ g in E: $(2+r) + 2 \cdot (1+r) + 3 \cdot (1+r) = 9$

$$11 = 9$$

↳ keinen Geradenpunkt. $g \nsubseteq E$: echt parallel

IV. Gerade / Ebene in Normalform:

↳ Untersuchung auf Parallelität

→ RV von g und $\vec{n}$ von E = 0!

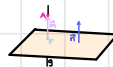
Bsp.: $RV = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow 3 + 4 + 1 \neq 0$$

→ wenn wahre Aussage, dann sind g & E parallel

→ wenn Widerspruch, dann schneiden sich g & E

LOTGERADE: von Ebene und Gerade



↳ Geradengleichung der Lotgeraden aufstellen

→ Stützpunkt: Punkt, RV: Normalenvektor von E

↳ Schnittpunkt von g & E: Lotfußpunkt

→ g wird in E in $\vec{x}$ eingesetzt und r wird ausgerechnet

Bsp.: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Schnittpunkt von g & E

$$g \text{ in } E: \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 3r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + r + 6 + 4r + 18 + 9r = 0$$

$$\Leftrightarrow 28 + 14r = 0$$

$$\Leftrightarrow r = -2$$

r in g einsetzen → F(3|1|2)

↳ Koordinaten des Spiegelpunktes A':

$$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$$

Zwei Geraden sind parallel, wenn sie in einer Ebene liegen und einander nicht schneiden. Zwei Geraden werden als echt parallel bezeichnet, wenn sie parallel, aber nicht identisch sind.

Lagebeziehungen

I. von zwei Ebenen: Koordinatenform / Parameterform

↳ E_1 : Koordinatenform, E_2 : Parameterform

↳ E_2 in E_1 einsetzen für $x/y/z$

→ erhält r/s was in E_2 eingesetzt wird → Schnittgerade

II. Parallel & identische Ebenen:

↳ Schnittgerade ermitteln (s.o.)

→ wenn wahre Aussage, dann sind E_1 & E_2 identisch

→ wenn Widerspruch, dann sind E_1 & E_2 echt parallel

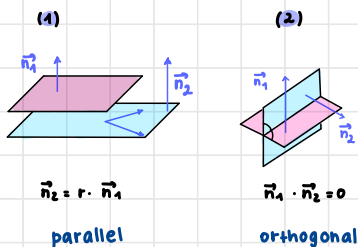
Parallel-Ebenen:

(1) Normalenvektoren sind kollinear

(2) Normalvektor von E_1 ist $\perp$ zu beiden RV von E_2

Orthogonale Ebenen:

Die Normalenvektoren sind orthogonal



III. Orthogonale Ebenen

Bsp.: $E_1: 2x - y - z = -1$

$E_2: A(3|1|2) + \perp$ zu E_1

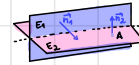
E_2 Geradengleichung: $\vec{n}_2$ von $E_2 \perp$ zu $\vec{n}_1$ von E_1

↳ also: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

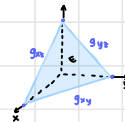
→ $E_2: y - z = -1$

↳ Bestimmung von Parameterform von E_2

↳ E_2 in E_1 einsetzen



SPURGERADEN:



→ sobald im dreidimensionalen Raum E eine Koordinatenebene schneidet

Ansatz für $g_{xy}: z = 0$

Ansatz für $g_{xz}: y = 0$

Ansatz für $g_{yz}: x = 0$

↳ man bekommt r/s

↳ einsetzen in Ebene

EBENENSCHAREN:

Punktprobe: P in E_a einsetzen für $x/y/z$

Gerade $\perp$ zu welcher Scharebene: Ansatz → $\vec{n}_{E_a} = k \cdot \text{RV}$

↳ Koeffizientenvergleich

↳ a in E_a einsetzen

Welche Ebene Koordinatenursprung: Bsp.: $E: 2x + 2y + z = 2a + 4$

↳ Es muss gelten: $2a + 4 = 0$, da $0(0|0|0)$ in E_a

allgemein parallel zur:

x -Achse: $x = 1, y = 0, z = 0$

y -Achse: $x = 0, y = 1, z = 0$

z -Achse: $x = 0, y = 0, z = 1$

$g \cdot \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_1 = 0$

$h: \vec{x} = \vec{b} + r \cdot \vec{v}$ $F: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_2 = 0$

$g \parallel h \Leftrightarrow \vec{u} = r \cdot \vec{v}$ $g \perp E \Leftrightarrow u = s \cdot \vec{n}_1$

$g \perp h \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ $E \parallel F \Leftrightarrow \vec{n}_1 = s \cdot \vec{n}_2$

$g \parallel E \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 0$ $E \perp F \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

ÜBERSICHT

Punkt Gerade $\diagup$

Punkt Ebene $\square$

Gerade Gerade $\parallel$ $\perp$ $\times$ $\angle$

Gerade Ebene $\square$ $\square$ $\square$

Ebene Ebene $\square$ $\square$ $\square$

Kreuzprodukt:

Formel: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$

LAGEBEZIEHUNGEN:

geg: 2 Ebenen E & F mit $\vec{n}_E$ & $\vec{n}_F$

ges: Lagebeziehung

Fall 1: $\vec{n}_E \nparallel \vec{n}_F \rightarrow E \& F$ schneiden sich (Schnittgerade)

Fall 2: $\vec{n}_E \parallel \vec{n}_F \rightarrow$ überprüfen ob Koordinatengleichung Vielfaches?

Fall 2a: Vielfaches $\rightarrow E \& F$ sind identisch

Fall 2b: $\neq$ Vielfaches $\rightarrow E \& F$ sind echt parallel

Bsp.: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$4r = -2 \Leftrightarrow r = -0,5$$

$$-6r = 3$$

$$-2r = 1$$

Wiederholung

$$\begin{pmatrix} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

1. RV anschauen

Vielfache $\neq$ Vielfache

$\parallel$ o. $\perp$ $\times$ o. $\angle$

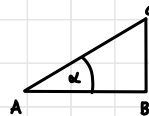
2. Punktprobe

2. Gleichsetzen

$$\begin{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

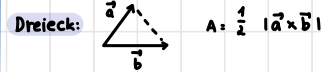
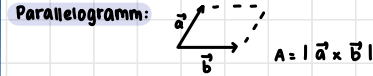
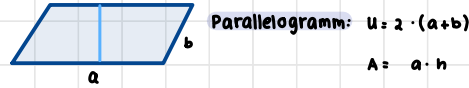
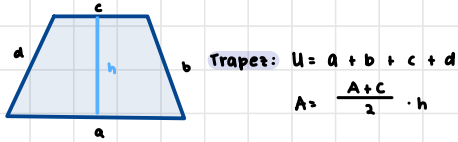
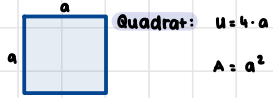
identisch parallel Schnittp. windschief

Gefälle:



$$\tan \alpha = \frac{|CB|}{|AB|}$$

Flächeninhalt - Formeln



Spat: $v = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

