I – Ebenengleichung bestimmen

Die Punkte A(0|3|1); B(−1|2|4); C(4|−3|5) spanne eine Ebene auf.

Stützvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Spannvektoren

$\vec{u} = AB = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = AC = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$E: x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gegeben ist die Ebene $E: x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ gib Punkte auf der Ebene an.

r = 1; s = 1: P(4 | 3 | 5)
r = 0; s = 1: P(3 | 3 | 7)
r = 1; s = 0: P(2 | 2 | 1)

Überprüfe, ob der Punkt P (5 | 3 | 3) auf der Ebene $E: x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ liegt.

$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \;\Big|\; - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ —> MATRIX Schreibweise

---

II – Normalenform

$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$
$E: \left(x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

a) Überprüfe, ob der Punkt A(4|2|2) auf der Ebene liegt.
$\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 + 0 - 4 = -1 \neq 0$ —> A liegt nicht auf der Ebene

---

III – Koordinatenform

$n1 \cdot x1 + n2 \cdot x2 + n3 \cdot x3 = d$

IV – Arbeiten mit verschiedenen Ebenengleichung

Eine Ebene enthält die Punkte A(1 | 2 | 3); B(4 | 1 | 0); C(−2 | 3 | 0). Stelle je eine Ebene in Parameter-, Normalen- und Koordinatenform auf.

Parameterform

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{n} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$E: x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Normalenform

$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \,(\vec{AB} \times \vec{AC}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E: \left(x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Koordinatenform

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow d = \vec{n} \cdot \vec{p} = 6 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 42$

E: $6x_1 + 18x_2 = 42$

Gegeben ist E: $x_1 - 2x_2 - x_3 = 4$

a) Überprüfe, ob A(1 | 3 | -2) und B(4 | 1 | -2) auf E liegen.

A: $1 - 6 + 2 = 4$

$-3 = 4$ | × A liegt nicht auf E

B: $4 - 2 - (-2) = 4$ | B liegt auf E