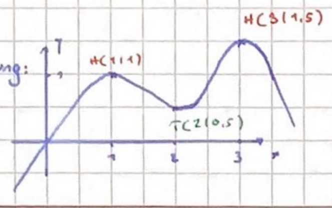
10.11.2021

Extrempunkte

Als (lokalen) Extrempunkt bezeichnet man den höchsten / tiefsten Punkt eines Schaubilds (in einer Umgebung).

Notwendige Bedingung:
$f'(x)=0$



Hinreichende Bedingung:
1. VZW bei f'
2. $f''(x) \neq 0$
   $>0 \rightarrow$ TP
   $<0 \rightarrow$ HP

Bsp. Berechne die EP von $f(x)= x^3 - 3x^2 + 1$

1. Schritt: Ableiten

$f'(x)=3x^2-6x$

2. Schritt: Ableitung Null setzen

$3x^2-6x=0$

$x\cdot(3x-6)=0$

$x_1=0$ $\quad$ $3x-6=0 \quad |+6 \quad |:3$

$x_2=2$

3. Schritt: Steigung neben den möglichen Extremstellen überprüfen (VZW überprüfen)

$x=0$: $f'(-1)=3\cdot(-1)^2-6\cdot(-1)=9>0$ $+$

$f'(-1)=3\cdot1^2-6\cdot1=-3<0$ $-$ „VZW von + nach −" $\rightarrow$ Hochpunkt bei $x=0$

$x=2$: $f'(1)=3\cdot1^2-6\cdot1=-3<0$ $-$

$f'(3)=3\cdot3^2-6\cdot3=9>0$ $+$ „VZW von − nach +" $\rightarrow$ Tiefpunkt bei $x=2$

4. Schritt: y-Wert bestimmen

$f(0)=1$ $\quad$ $H(0|1)$

$f(2)=-3$ $\quad$ $T(2|-3)$

Bsp. Berechne die EP von $f(x)= x^3 - 12x + 3$

1. Schritt: Zweimal ableiten

$f'(x)=3x^2-12$

$f''(x)=6x$

2. Schritt: Erste Ableitung Null setzen

$3x^2-12=0 \quad |+12$

$3x^2=12 \quad |:3$

$x^2=4 \quad |\sqrt{\ }$

$x_{1,2}=\pm2$

3. Schritt: Mögliche Extremstellen in zweite Ableitung einsetzen

$f''(-2)=-12<0 \rightarrow$ HP bei $x=-2$

$f''(2)=6\cdot2=12>0 \rightarrow$ TP bei $x=2$

4. Schritt: y-Wert bestimmen

$f(-2)=(-2)^3-12\cdot(-2)+3=19 \rightarrow H(-2|19)$

$f(2)=2^3-12\cdot2+3=-13 \rightarrow T(2|-13)$

10.11.2021

Anleitung: Extrempunkte berechnen:

① Zweimal ableiten
② Erste Ableitung Null setzen
③ Ergebnisse aus ② in zweite Ableitung einsetzen

$f''(x) > 0 \rightarrow$ TP bei $x =$

$f''(x) < 0 \rightarrow$ HP bei $x =$

$f''(x) = 0 \rightarrow$ VZW bei $f'(x)$

④ y-Wert bestimmen

Übungen:

a) $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x$
c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
d) $f(x) = x^3 - 2$
e) $f(x) = e^x \cdot x$
f) $f(x) = e^x \cdot x^3$

a) $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$

① $f'(x) = -4x + 8$

② $-4x + 8 = 0 \quad |-8$

$-4x = -8 \quad |:(-4)$

$x = 2$

③ $x = 2$ $\quad f'(1) = -4 \cdot 1 + 8 = -12 < 0$ $\quad -$

$f'(3) = -4 \cdot 3 + 8 = -20 > 0$ $\quad +$

VZW von − nach +

$\rightarrow$ Tiefpunkt bei $x = 2$

④ $f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 6 = 26$ $\quad H(2|26)$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x$

① $f'(x) = 3x^2 - 6x + 9$

$f''(x) = 6x - 6$

②

e) $f'(x) = e^x \cdot x^3 + e^x \cdot 3x^2$

$= e^x (x^3 + 3x^2)$