ASAM GYMNASIUM MÜNCHEN

Schuljahr 2023/24

Name: [redacted]

Q11/1 - 1m1, 1m2, 1m3,– Pic, Hau, Sed

1. Schulaufgabe aus der Mathematik
am 20.11.2023

Arbeitszeit: ca. 20 min

Teil A (Ohne Hilfsmittel)

Auf sauberes Arbeiten wird Wert gelegt! Rechenschritte müssen klar ersichtlich sein!
***Keine** Hilfsmittel erlaubt!*

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen mithilfe bekannter Ableitungsregeln! Vereinfachen Sie jeweils soweit wie möglich!

a) $f_1(x) = 5x^3 - 2x + 1$ — 2 / 2BE

b) $f_2(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{x^2}$ — 2 / 2BE

c) $f_3(x) = \frac{x^3}{2x+3}$ — 3 / 3BE

d) $f_4(x) = (x^{-2} + 1) \cdot (5x^3 - 2x + 1)$ — 3 / 3BE
(unter Verwendung des Ergebnisses von Teil a)

a) $f_1'(x) = 15x^2 - 2$

b) $\cancel{f_2(x) = 4x^2 +}$ $f_2(x) = \frac{4}{3}x^2 + x^{-2}$

$f_2'(x) = 4x^2 - 2x^{-3}$

c) $f_3'(x) = \frac{3x^2(2x+3) - x^3 \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{6x^3 + 9x^2 - 2x^3}{(2x+3)^2}$

Bitte deutlich schreiben!

$= \frac{4x^3 + 9x^2}{(2x+3)^2}$

$\cancel{NR: (4x^3 + 9x^2) \cdot (2x+3)^2 = 2x^2}$ vgl. Rückseite

d) $f_4'(x) = \cancel{6}\, -2x^{-3}(5x^3 - 2x + 1) + (15x^2 - 2) \cdot (x^{-2} + 1)$

$= -10 + 4x^{-2} - 2x^{-3} + 15 + 15x^2 - 2x^{-2} - 2$

$= -2x^{-3} + 2x^{-2} + \cancel{3}\, 15x^2 + 3$

Aufgabe 2

Geben Sie den Funktionsterm einer gebrochen rationalen Funktion f an, deren Graph folgende Eigenschaften besitzt: 3 / 4

- schneidet die x-Achse nur bei $x = 1$ und $x = 5$
- senkrechte Asymptote bei $x = -3$
- waagrechte Asymptote ist die x-Achse

$f(x) = \cancel{\frac{(x-1)(x-5)}{x+3}} \quad \frac{1}{x+3} \; ; \; \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-5)}$

Keine hebbare Definitionslücke!

Aufgabe 3

Die Funktion $s: t \mapsto s(t)$ gibt an, wie viel Wasser sich nach der Zeit t nach dem Beginn der Messung im Wasserbecken eines Schwimmbads befindet (t in Stunden, $s(t)$ in Litern).

a) Erklären Sie, welche Bedeutung die Ableitungsfunktion $s'(t)$ in diesem Sachzusammenhang hat. $1\frac{1}{2}$ / 2

b) Geben Sie außerdem im Sachzusammenhang an, welche Bedeutung es hat, wenn zu einem gegebenen Zeitpunkt t_0 gilt: $s(t_0)$= 15 00, $s'(t_0) = 0$ und $s''(t_0) < 0$. 1,5 / 3

a) Die Ableitungsfunktion $s'(t)$ gibt ~~an~~ die Wasserzunahme oder Wasserabnahme in Abhängigkeit der Zeit an. ~~Sie~~ Sie gibt an, wie ~~schnell~~ das Wassers ~~zu~~ zu- oder abnimmt.

+ Volumen des

Genauer

b) ~~B~~ Hier wird ~~angegeben, dass d~~ ein ~~...~~ lokales Maximum angegeben. (Bis dahin?)

Das ist die maximale Wassermenge, die das Becken hat.

+ Interpretation von $s(t_0) = 1500$

Nicht unbedingt!

Viel Erfolg!

Σ 16 / **19BE**

Schuljahr 2023/24

ASAM
GYMNASIUM
MÜNCHEN

Name: [redacted]

Q11/1 - 1m1, 1m2, 1m3,– Pic, Hau, Sed

10

1. Schulaufgabe aus der Mathematik AA 11/2
am 14.03.2024

Arbeitszeit: ca. 45 min

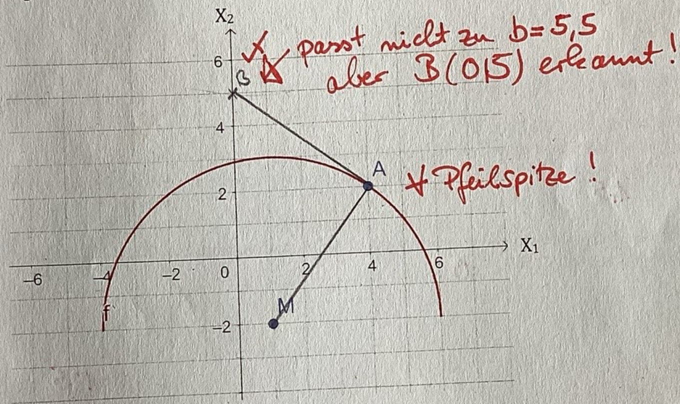
Teil B (Mit Hilfsmittel)

Auf sauberes Arbeiten wird Wert gelegt! Rechenschritte müssen klar ersichtlich sein! Die BE-Verteilung ist vorläufig.

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner & Merkhilfe

Aufgabe 3

Gegeben sind die Punkte M und A mit ganzzahligen Koordinaten in der folgenden Abbildung:



c) Geben Sie die Gleichung für den Kreis um M passend zur obigen Abbildung an und lösen Sie diese nach x_2 auf, so dass Sie den Funktionsterm angeben, der zur abgebildeten Funktion passt. **(4 BE)** 1,5

d) Der Punkt B (0|b) auf der x_2-Achse soll so ermittelt werden, dass die Gerade AB orthogonal zu $\overrightarrow{MA}$ ist. Zeichnen Sie den Vektor $\overrightarrow{MA}$ in die Abbildung ein, geben Sie seine Koordinaten an und ermitteln Sie nachvollziehbar den ganzzahligen Wert von b. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie den Punkt B einzeichnen. **(4 BE)** 3,5

e) Geben Sie die Gleichung der Tangente an den Kreis im Punkt A als Gerade in Koordinatendarstellung (y = mx+t) an. **(2 BE)** 2

Aufgabe 6

Gegeben ist die Funktion

$$f: x \mapsto \frac{x^2 + 4x + 18}{3(x+1)}$$

mit Definitionsbereich
D = IR \ {−1}.

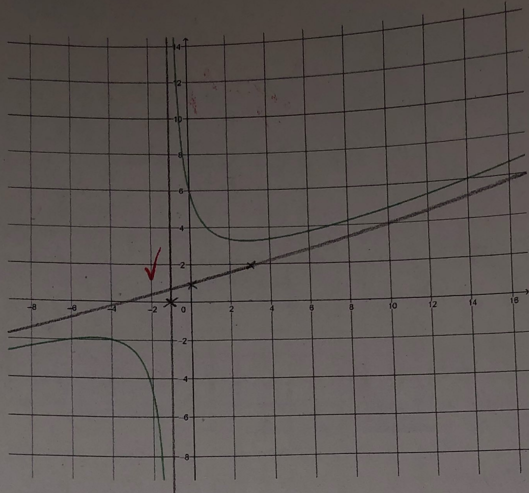


Abbildung 2: Graph der Funktion f bzw. b

a.) Zeigen Sie, dass der Funktionsterm äquivalent ist zu:

$$b(x) = \frac{1}{3}\ x + 1 + \frac{5}{x+1}$$

4 / 4BE

b.) Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_f an und zeichnen Sie die Asymptoten in Abbildung 2 auf diesem Blatt ein.

3 / 3BE

c.) Ermitteln Sie die genaue Lage und Art der Extrema, runden Sie erst danach auf zwei Dezimalen, um mit Abbildung 2 vergleichen zu können.

(Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^2+2x-14}{3x^2+6x+3}$)

7,5 / 8BE

Eine vertikal stehende Getränkedose hat die Form eines geraden Zylinders. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunkts S von Dose und enthaltener Flüssigkeit hängt von der Füllhöhe der Flüssigkeit über dem Dosenboden ab. Ist die Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 14 cm. Die bisher betrachtete Funktion f gibt für $0 \leq x \leq 14$ die Höhe von S über dem Dosenboden in Zentimetern an; dabei ist x die Füllhöhe in Zentimetern (vgl. Abbildung 3). Abbildung 3 zeigt den Graphen von f im Intervall [0;14]

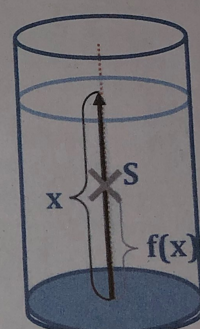


Abbildung 3: Getränkedose mit Schwerpunkt S

d.) Bestimmen Sie $f(0)$ und $f(14)$ und interpretieren Sie die beiden Ergebnisse im Sachzusammenhang.

3 / 3BE

e.) Je tiefer der Schwerpunkt S liegt, desto stabiler steht die Dose. Sie enthält 200 ml Flüssigkeit. Geben Sie auf ml genau an, wie viel Flüssigkeit Sie aus einer vollen Dose trinken müssen, um diesen stabilsten Zustand zu erreichen!

0 / 4BE

Σ 29 / 35 BE 29

P12

Gesamt (Teil A und B) Σ 45 / 54 BE 45

Viel Erfolg!

Kurs 1m1

1. Schulaufgabe aus der Mathematik

am 20.11.2023

Schulaufgabe
Asam-Gymnasium
München

[redacted]

4) a) $h'(3) = \frac{-2}{(3+1)^2} = -\frac{1}{8}$

$m_n = \cancel{-\frac{1}{8}}\ \cancel{-}8$ $\qquad h(3) = \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2}$

$n(x) = \cancel{-}8x + t \qquad \Rightarrow P(3|\frac{1}{2})$

$n(3) = \cancel{-}8 \cdot 3 + t = \frac{1}{2}$

$\cancel{-}24 + t = \frac{1}{2} \quad |\cancel{+}-24$

$t = \cancel{24,5}\ -23,5$

$\Rightarrow n(x) = \cancel{-}8x \cancel{+24,5} -23,5$

b) $\tan\alpha = m \Rightarrow ∢\alpha = \tan^{-1}(m)$

$\alpha = |\tan^{-1}(-8)| = |-82,9| = \underline{82,9°}$

6) a) ~~$(x^2+4x+18) : (x+1)$~~

$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^2+4x+18)}{(x+1)}$

$(x^2+4x+18) : (x+1) = x + 3 + \frac{15}{x+1}$

$\underline{-(x^2+x)}$

$3x+18$

$\underline{-(3x+3)}$

15

~~$f(x) = \frac{1}{3}$~~

$f(x) = \frac{1}{3}\left(x + 3 + \frac{15}{x+1}\right)$

$= \frac{1}{3}x + 1 + \frac{5}{x+1}$

$f(x) = b(x)$

b) senkrechte Asymptote: $x = -1$

waagerechte Asymptote: —

Schräge Asymptote: $y = \frac{1}{3}x + 1$

c) ~~$f'(x) = (2x+4)(3(x+1))$~~

$$f(x) = \frac{x^2+4x+18}{3x+3}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+4)(3x+3) - 3(x^2+4x+18)}{(3x+3)^2}$$

$$= \frac{6x^2+6x+12x+12-3x^2-12x-54}{9x^2+18x+9}$$

$$= \frac{3x^2+6x-42}{9x^2+18x+9}$$

$$= \frac{3(x^2+2x-14)}{3(3x^2+6x+3)}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(3x^2+6x+3) - (6x+6)(x^2+2x-14)}{(3x^2+6x+3)^2}$$

$$= \frac{6x^3+12x^2+6x+6x^2+12x+6-6x^3-12x^2+84x-6x^2-12x+84}{(3x^2+6x+3)^2}$$

$$= \frac{-78x+90}{(3x+3)^4} \quad +90 \quad = \frac{90(x+1)}{3^4(x+1)^4} = \ldots$$

$f'(x) = 0 \quad x^2+2x-14 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-14)}}{2\cdot1} = \frac{-2\pm\sqrt{60}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{60}}{2} \quad x_1 = -1+\sqrt{15}$$

$$x_2 = \frac{-2-\sqrt{60}}{2} \quad x_2 = -1-\sqrt{15}$$

$f''(-1+\sqrt{15}) < 0$ ~~$= -0{,}01$~~

$f''(x_1) < 0 \Rightarrow$ Maximum

$>$

$f''(-1-\sqrt{15}) > 0 \Rightarrow$ Minimum

Maximum: ~~$S(-1+\sqrt{15})$~~ $S(2{,}87 \mid 3{,}25)$

Minimum: $S(-4{,}87 \mid -1{,}92)$

d) $f(0) = 6$ ✓

$f(0)$ beschreibt, dass die Dose nicht gefüllt ist. Die Höhe T (vom S) über dem Dosenboden beträgt 6cm. ✗

$f(14) = 6$ ✓

$f(14$ beschreibt, dass die Dose ~~ebenfalls nicht gefüllt ist~~ um 14cm gefüllt. Die Höhe T (von S) über dem Dosenboden beträgt ebenfalls 6cm. ✗

e) $f(x) = 200$ $\qquad S = f(x)$

$$\frac{x^2+4x+18}{3(x+1)} = 200 \quad | -200$$

$$\frac{x^2+4x+18}{3(x+1)} - 200 = 0$$

2.

$$\frac{x^2+4x+18}{3(x+1)} - \frac{200 \cdot 3(x+1)}{1 \cdot 3(x+1)} = 0$$

$$\cancel{\frac{x^2+4x+18 - 0{,}6x - 3}{3(x+1)} = 0}$$

$$\cancel{\frac{x^2+3{,}4x+15}{3(x+1)} = 0 \quad | \cdot 3(x+1)}$$

$$\cancel{x^2+3{,}4x+15 = 0}$$

$$\cancel{x_{1/2} = \frac{-3{,}4 \pm \sqrt{3{,}4^2 - 4 \cdot 15}}{2 \cdot 1}}$$

$$\cancel{x^2+4x+18 - 600x +}$$

$$\cancel{x^2+4x+18 =}$$

Woher?

$$\frac{x^2+4x+18 - 600x - 600}{3(x+1)} = 0 \quad | \cdot 3(x+1)$$

$$x^2 - 596x - 582 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{596 \pm \sqrt{(-596)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-582)}}{2 \cdot 1} = \frac{596 \pm \sqrt{357544}}{2}$$

$$x_1 = \frac{596 + \sqrt{357544}}{2} \approx 596{,}97$$

$$\left(x_2 = \frac{596 - \sqrt{357544}}{2} \approx -178474\right)$$

Das Minimum kann aus G_f abgelesen werden!

2.

A: Man muss die Dose auf ca. 597 ml auffüllen. Da läuft sie über, da max. 200 ml!

23/24

20 min

/ 2BE

/ 2BE

/ 3BE

/ 3BE

$y = mx + t$
$y' = m = konst$

5) $g_a'(x)$ hat keine ~~schräge~~ waagrechte Asymptote.
Die Ableitung von $g(x)$ hat jedoch eine ~~schräge~~ waagr. Asymptote.

$g_b'(x)$ hat eine ~~senkrechte Asymptote bei $x = -1$.~~ hebbare Definitionslücke
Allerdings hat die Ableitung nur eine senkrechte Asymptote bei $x = -3$.

$g_c'(x)$ hat bei $x_1 = -3$ und bei $x_2 = 3$ eine senkrechte Asymptote. Die Ableitung hat nur bei $x = -3$ eine senkrechte Asymptote.