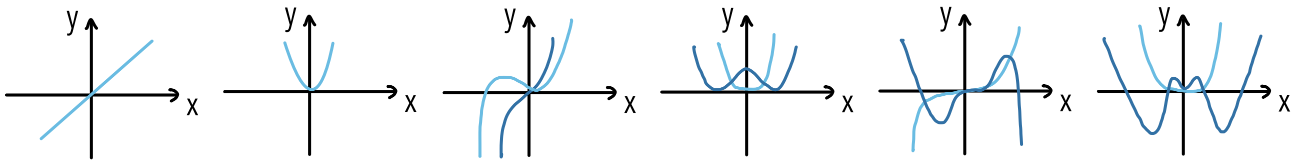
Analysis Geometrie (Vektoren) Stochastik

Analysis

Ganzrationale Funktionen

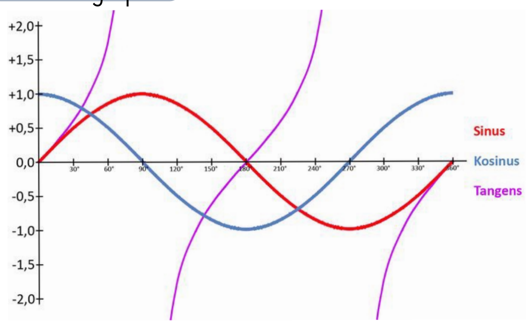
Grad 1 Grad 2 Grad 3 Grad 4 Grad 5 Grad 6 (Beispiele)



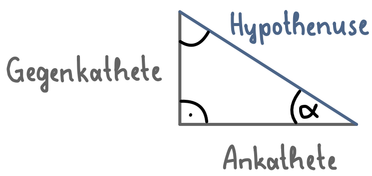
Sinus, Cosinus, Tangens

Bei den Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens handelt es sich um die wichtigsten trigonometrischen Funktionen.

Funktionsgraphen



sin (x), cos(x) und tan(x) im rechtwinkligen Dreieck



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}}$$

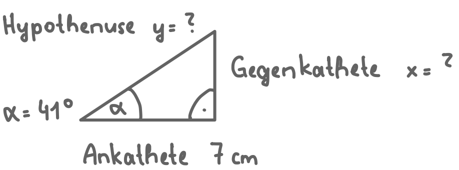
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

Ableitung

$\sin(x) \rightarrow \cos(x) \rightarrow -\sin(x) \rightarrow -\cos(x) \rightarrow \sin(x)$

Beispielrechnungen



Gegenkathete x: $\tan(\alpha) = \frac{G}{A}$

$\tan(41°) = \frac{x}{7\text{cm}} \quad | \cdot 7\text{ cm}$

$\tan(41°) \cdot 7\text{cm} = x$

$0{,}87 \cdot 7\text{ cm} \approx x$

$6{,}09\text{ cm} \approx x$

Hypothenuse: $\cos(\alpha) = \frac{A}{H}$

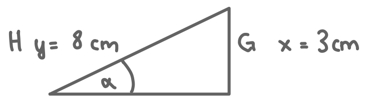
$\cos(41°) = \frac{7\text{cm}}{y} \quad | \cdot y \quad | : \cos(41°)$

$\frac{7\text{cm}}{\cos(41°)} = y$

$\frac{7\text{cm}}{0{,}7547} \approx y$

$9{,}28\text{ cm} \approx y$

Winkel gesucht:



$\sin(\alpha) = \frac{G}{H}$

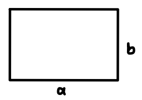
$\sin(\alpha) = \frac{3\text{ cm}}{8\text{ cm}} = \frac{3}{8}$

$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right) = 22°$

Formeln: Flächen und Volumen

Flächen

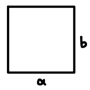
Rechteck



Umfang: $U = 2a + 2b$

Fläche: $A = a \cdot b$

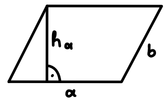
Sonderfall: Quadrat



Umfang: $U = 4a$

Fläche: $A = a^2$

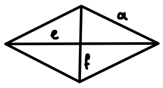
Parallelogramm



Umfang: $U = 2a + 2b$

Fläche: $A = a \cdot h_a$

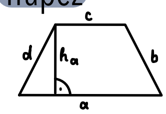
Raute



Umfang: $U = 4a$

Fläche: $A = \frac{e \cdot f}{2}$

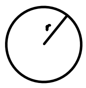
Trapez



Umfang: $U = a + b + c + d$

Fläche: $A = \frac{a + c}{2} \cdot h_a$

Kreis

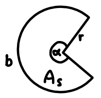


Umfang: $U = 2 \cdot \pi \cdot r$

od. $U = d \cdot r$

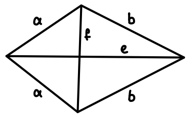
Fläche: $A = \pi \cdot r^2$

Kreissegment



$$\frac{A_{Segment}}{\pi \cdot r^2} = \frac{b}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{\alpha}{360°}$$

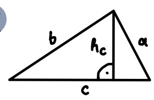
Drachen



Umfang: $U = 2a + 2b$

Fläche: $A = \frac{e \cdot f}{2}$

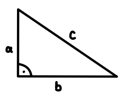
Dreieck



Umfang: $U = a + b + c$

Fläche: $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

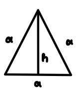
Sonderfall: rechtwinkliges Dreieck



Umfang: $U = a + b + c$

Fläche: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

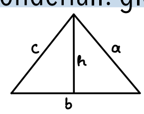
Sonderfall: gleichseitiges Dreieck



Umfang: $U = 3a$

Fläche: $A = \frac{a \cdot h}{2}$

Sonderfall: gleichschenkliges Dreieck

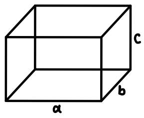


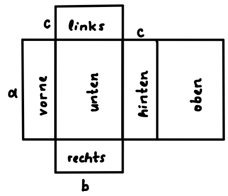
Umfang: $U = a + b + c$

Fläche: $A = \frac{c \cdot h}{2}$

Volumen

Quader

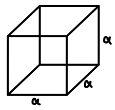




Oberfläche: $O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Volumen: $V = a \cdot b \cdot c$

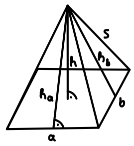
Sonderfall: Würfel

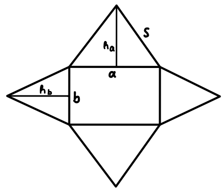


Oberfläche: $O = 6 \cdot a^2$

Volumen: $V = a^3$

Pyramide



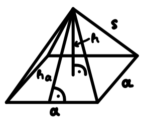


Oberfläche: $O = a \cdot b + 2 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot h_b}{2}$

$O = a \cdot b + 2 + a \cdot h_a + b \cdot h_b$

Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h$

Sonderfall: quadratische Pyramide

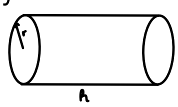


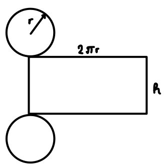
Oberfläche: $O = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2}$

$O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a$

Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

Zylinder



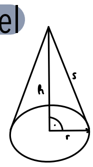


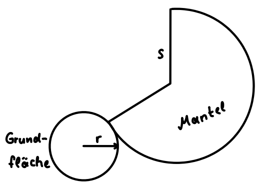
Oberfläche: $O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$

Volumen: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Kegel





Oberfläche: $O = \pi \cdot r \cdot (r + s)$

Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

Kugel

Oberfläche: $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Volumen: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

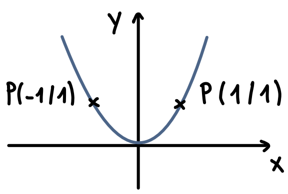
Verhalten der Funktion bei ∞ und $-\infty$

	EXPONENT	
	gerade → Achsensymmetrie	ungerade → Punktsymmetrie
LEITKOEFFIZIENT positiv	Bsp.: $2x^4$; $10x^8$ $\cup$ für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to \infty$ ↳ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to \infty$ ↳ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$	Bsp.: $2x^3$; $10x^7$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
LEITKOEFFIZIENT negativ	Bsp.: $-2x^4$; $-10x^8$ $\cap$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	Bsp.: $-2x^3$, $-10x^7$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

Symmetrie

Achsensymmetrie zur y-Achse

> Graph auf der linken Seite der y-Achse ist Spiegelbild der rechten Seite



$f(-x) = f(x)$

alle Exponenten im Term sind gerade

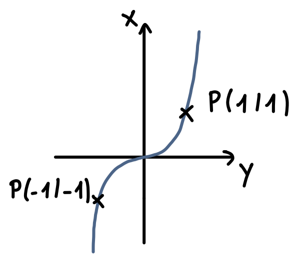
rechnerische Überprüfung:

$f(x) = x^4 - x^2 - 1$

$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 - 1 = x^4 - x^2 - 1 = f(x)$

Punktsymmetrie zum Ursprung

> Spiegelung am Symmetriepunkt



$f(x) = -f(x)$

alle Exponenten sind ungerade

rechnerische Überprüfung:

$f(x) = -7x^5 + 2x^3 - 4x$

$f(-x) = -7 \cdot (-x)^5 + 2 \cdot (-x)^3 - 4 \cdot (-x)$

$= 7x^5 - 2x^3 + 4x \neq f(x)$

$-f(x) = -(-7x^5 + 2x^3 - 4x)$

$= 7x^5 - 2x^3 + 4x = f(x)$

Achsensymmetrie

$f(x) = 2x^6 + x^4 + 2x^2 + 2x^0$

Punktsymmetrie

$f(x) = 3x^3 + x^1$

$x = x^1 =$ ungerade

$-1 = -1x^0 =$ gerade (Exponent)

Nullstellen bestimmen

Ablesen

Wenn der Funktionsterm als Produkt dargestellt ist, arbeitet man mit dem SvNP

SvNP: Satz vom Nullprodukt
> Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist

Beispiel: $f(x) = -0{,}5 \cdot (x-3) \cdot (x-1)^2 \cdot (x+2)$

$$0 = -0{,}5 \cdot (x-3) \cdot (x-1)^2 \cdot (x+2)$$

$$0 = (x-3) \quad \vee \quad 0 = (x-1)^2 \quad \vee \quad 0 = (x+2)$$
$$x_1 = 3 \quad \wedge \quad x_2 = 1 \quad \wedge \quad x_3 = -2$$

Ausklammern

Wenn alle Summanden des Funktionsterms Variablen enthalten

Beispiel: $f(x) = x^3 - 2x^2$

$$0 = x^3 - 2x^2 \quad | \text{ausklammern}$$
$$0 = x^2 \cdot (x-2) \quad | \text{SvNP}$$
$$0 = x^2 \quad \vee \quad 0 = x-2$$
$$x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 2$$

PQ-Formel

pq-Formel: $x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Beispiel: $f(x) = x^2 - 7x + 12$

$$0 = x^2 - 7x + 12 \quad | \text{pq-Formel}; \quad p = -7 \quad q = 12$$
$$x_{1,2} = -\frac{(-7)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-7)}{2}\right)^2 - 12}$$
$$= 3{,}5 \pm 0{,}5$$
$$x_1 = 3{,}5 - 0{,}5 = 3 \quad \wedge \quad x_2 = 3{,}5 + 0{,}5 = 4$$

Substitution und PQ-Formel

: Wenn der Funktionsterm nur die Potenzen x^2 und x^4, x^3 und x^6 (usw.) enthält.

Beispiel: $f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$

$$0 = x^4 - 7x^2 + 12 \quad | \text{Substitution}: \; x^2 = z$$
$$0 = z^2 - 7z + 12 \quad | \text{pq-Formel}; \; p = -7 \quad q = 12$$
$$z_{1,2} = -\frac{(-7)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-7)}{2}\right)^2 - 12}$$
$$z_1 = 3 \quad \wedge \quad z_2 = 4 \quad | \text{Resubstitution}: \; z = x^4$$

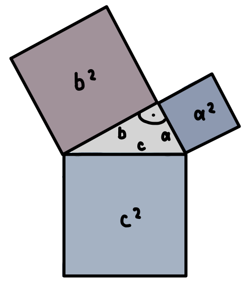
$$z_1 = 3 \quad \wedge \quad z_2 = 4$$
$$x^2 = 3 \quad \vee \quad x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$
$$x = \pm\sqrt{3} \quad \vee \quad x = \pm 2$$
$$\downarrow$$
$$x_1 = -\sqrt{3} \quad \wedge \quad x_2 = \sqrt{3} \quad \wedge \quad x_3 = -2 \quad \wedge \quad x_4 = 2$$

Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

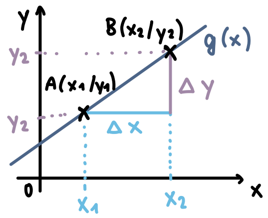
Länge einer Seite berechnen:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Lineare Funktionen

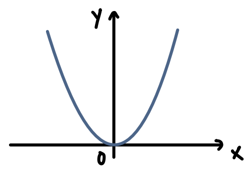
$y = m \cdot x + n$



Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Quadratische Funktionen

$f(x) = ax^2 + bx + c$



quadratische Funktion: höchstens 2 Nullstellen

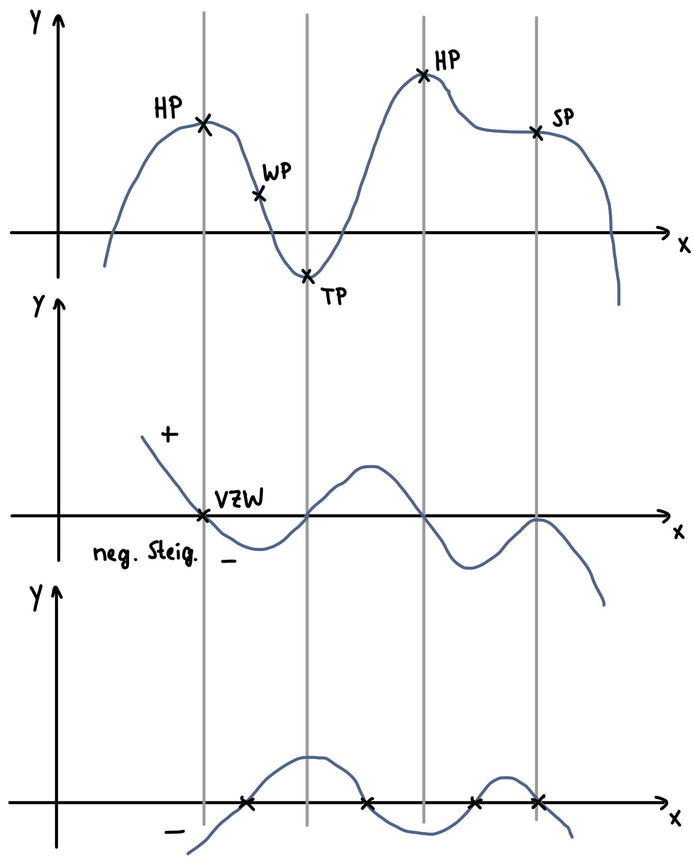
Polynome

$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + d$ ⟶ Polynom n-ten Gerades

↳ $n :=$ Grad eines Polynoms (höchste Potenz)

höchste Potenz ≙ höchste Anzahl Nullstellen

Zusammenhang von f, f' und f''



	HP	TP	SP
$f(x)$	+	–	+
$f'(x)$	0 NS	0 NS	0
$f''(x)$	– neg. VZ	+ pos. VZ	0

Beispiel Geschwindigkeit:

f(t) Entfernung

f'(t) Geschwindigkeit / Änderung der Entfernung

f''(t) Beschleunigung / Änderung der Geschwindigkeit

f'''(t) Änderung der Beschleunigung

Gleichungssysteme lösen

Additionsverfahren

1. Gleichungen in eine einheitliche Form bringen
2. Eine der Gleichungen von der anderen addieren / subtrahieren (Gleichung kann zuvor mit einer Zahl multipliziert werden)
3. Gelöste Variable in Ursprungleichung einsetzen und nach der anderen Variable auflösen

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 2y = 5 - x & \rightarrow \quad x + 2y = 5 \quad 2\cdot\text{I} \\ \text{II} & -2x - 4 = -3y & \rightarrow \quad -2x + 3y = 4 \quad +\,\text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2\cdot\text{I} & 2x + 4y = 10 \\ \text{II} & -2x + 3y = 4 \\ \hline & 7y = 14 \quad |:7 \\ & \boxed{y = 2} \end{array}$$

in I

$x + 2\cdot 2 = 5$

$\boxed{x = 1}$

Einsetzungsverfahren

1. Eine Gleichung nach einer der Variablen umstellen
2. Umgestellte Gleichung in die andere Gleichung einsetzen und nach anderer Variable umstellen
3. Wert für Variable in Gleichung aus 1. einsetzen

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + 4y = 16 \\ \text{II} & 3x + 2y = 13 \end{array}$$

I nach x umstellen

$x = 16 - 4y \Rightarrow \text{I.1}$

in II

$3\cdot(16 - 4y) + 2y = 13$

$\boxed{y = 3{,}5}$

$y = 3{,}5$ in I.1

$x = 16 - 4\cdot 3{,}5$

$\boxed{x = 2}$

Gleichsetzungsverfahren

1. Gleichungen nach der gleichen Variable umstellen
2. Gleichungen gleichsetzen, nach übriger Variable umstellen
3. Lösung in Ursprungsgleichung einsetzen und nach Variable auflösen

$$\begin{array}{llll} \text{I} & x + 2y = 4 & |-2y & \longrightarrow \quad x = 4 - 2y \\ \text{II} & x = 3 - y & & \longrightarrow \quad x = 3 - y \end{array}$$

gleichsetzen: $4 - 2y = 3 - y$

$\boxed{y = 1}$

in I

$x = 3 - 1$

$\boxed{x = 2}$

Mittlere Änderungsrate und Differenzenquotient

durchschnittliche Steigung im Intervall > Sekante

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

z.B. $f(x) = x^2 + x$ I $[3;11]$ → $a = 3$ $b = 11$

$f(a) = f(3) = 3^2 + 3 = 12$

$f(b) = f(11) = 11^2 + 11 = 132$

$m = \frac{132 - 12}{11 - 3} = 15$

Momentane Änderungsrate und Ableitung

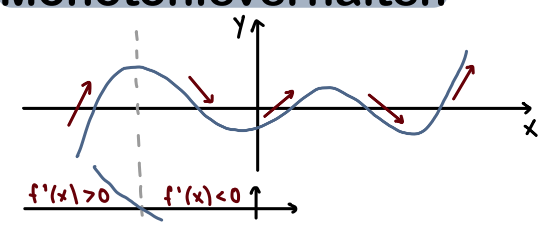
Steigung an einer bestimmten Stelle > Tangente

1. Ableitungsfunktion bestimmen
2. gefragten x-Wert in Ableitungsfunktion einsetzen

z.B. $f(x) = 3x^4 + 2x^2$ an $x = 4$ → $f'(x) = 12x^3 + 4x$

$f'(4) = 12\cdot 4^3 + 4\cdot 4 = 784 = m$

Monotonieverhalten



↗ streng monoton wachsend, f' oberhalb x-Achse

$f'(x) > 0$ → f streng monoton wachsend

↘ streng monoton fallend, f' unterhalb der x-Achse

$f'(x) < 0$ → f streng monoton fallend

Ableitungsregeln

Potenzregel

$f(x) = x^n$

$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Faktorregel

$f(x) = m \cdot x^n$

$f'(x) = n \cdot m \ x^{n-1}$

Summenregel

$f(x) = x^n + x^m$

$f'(x) = n \cdot x^{n-1} + m \cdot x^{m-1}$

Produktregel

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ durch Multiplikation verbunden, beide x

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Beispiel: $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$

Kettenregel

$u = x^2 \qquad v = e^{3x}$

$u' = 2x \qquad v' = 3 \cdot e^{3x}$

$f'(x) = 2x \cdot e^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x}$

Kettenregel

$f(x) = u(v(x))$

$f'(x) = u'(v(x)) \quad v'(x)$

Beispiel:

$e^{v(x)}$ $\qquad f(x) = e^{2x^2 - x}$ $\qquad u = e^x \quad v = 2x^2 - x$

$f'(x) = e^{2x^2 - x} \cdot (4x - 1)$ $\qquad u' = e^x \quad v' = 4x - 1$

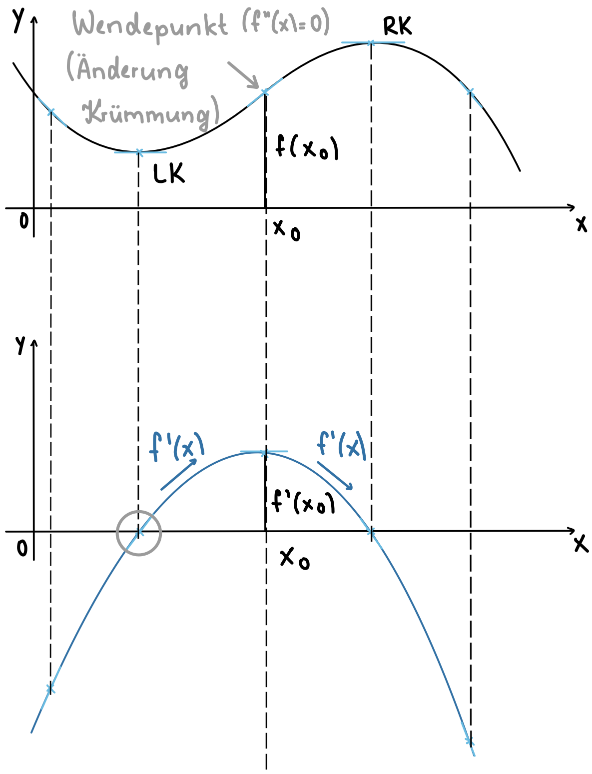
$(v(x))^n$ $\qquad f(x) = 3(e^x - 3x)^2$ $\qquad u = 3x^2 \quad v = e^x - 3x$

$f'(x) = 6(e^x - 3x) \cdot (e^x - 3)$ $\qquad u' = 6x \quad v' = e^x - 3$

$\ln(v(x))$ $\qquad f(x) = \ln(e^x - 1)$ $\qquad v = e^x - 1$

$\frac{v'(x)}{v(x)}$ $\qquad f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ $\qquad v' = e^x$

Krümmungsverhalten von Funktionen (2.Ableitung)



Bezug zur Monotonie:

$f''(x) > 0$

↓

f' wächst streng monoton

↓

Graph von f ist linksgekrümmt

$f''(x) < 0$

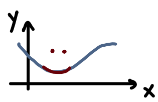
↓

f' nimmt streng monoton ab

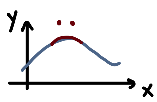
↓

Graph von f ist rechtsgekrümmt

Merke:



$f''(x) > 0$ linksgekrümmt — positiv ☺



$f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt — negativ ☹

Rechnerische Bestimmung:

- Nullstellen von f'' bestimmen
- x-Werte der NS in f'' einsetzen und nach VZ schauen

Notw. Bed.: $f''(x) = 0$ $\qquad f''(x) >/< 0$

Extremstellen

1. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

→ Nullstellen von f' bestimmen

2. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

→ Nullstellen x in $f''(x)$

$f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$	lokales Maximum HP	neg.	⌢
$f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$	lokales Minimum TP	pos.	⌣

3. y-Koordinate bestimmen HP / TP (x / f(x))

Randextrema überprüfen!

Wendestellen

Wendestelle = Graph von f geht geht von LK in RK über (oder umgekehrt)

1. Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

→ Nullstellen von f'' bestimmen

2. Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

→ Nullstellen x f'''

$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) < 0$	LK zu RK	neg.
$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) > 0$	RK zu LK	pos.
$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) = 0$, dann VZW überprüfen		
↳ wenn VZW, dann Wendestelle		

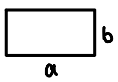
3. y-Koordinate

Wendetangente

1. Ansatz: $y = m \cdot x + n$
2. m = f'(x) > wenn W(1/3) gegeben ist, dann ist m = f'(1) > x-Wert in Ableitung einsetzen
3. Punkt und m in die Gleichung einsetzen, um n zu bestimmen
4. Funktionsgleichung der Tangente angeben

Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Maximaler Flächeninhalt Rechteck



Wie sind a und b zu wählen, damit der Flächeninhalt maximal wird? Umfang: 16m

1. Was soll maximal oder minimal werden? Beschreiben der Zielgröße, die external werden soll, durch eine Formel. Diese kann mehrere Variablen enthalten.

→ Flächeninhalt soll maximal werden

HB (Hauptbedingung) $A(a,b) = a \cdot b$

2. Nebenbedingung? Aufsuchen von Nebenbedingungen, die Abhängigkeiten zwischen den Variablen enthalten.

Umfang gegeben, Formel: $U = 2a + 2b$

↳ NB: $2a + 2b = 16$ → $a = 8 - b$

3. Bestimmen der Zielfunktion, die nur noch von einer Variable abhängt (welche Variable zweckmäßig ist, zeigt oft erst die Bearbeitung), Angeben des Definitionsbereichs der Zielfunktion.

(NB in HB) $A_{(a,b)} = a \cdot b$ $a = 8 - b$

$A(b) = (8-b) \cdot b = -b^2 + 8b$ → ZF (Zielfunktion)

4. Extremwerte und gesuchte Werte ermitteln: Untersuchen der Zielfunktion auf Extremwerte, Beachtung der Ränder des D, Formulieren des Ergebnisses.

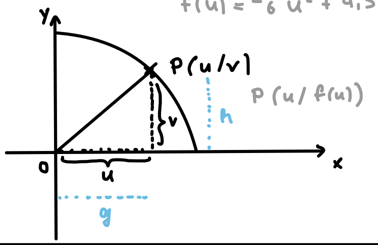
Extremstellen bestimmen, Max für $b = 4 \wedge a = 4$

⇒ A maximal für $a = 4$ m und $b = 4$ m ($16\,m^2$)

Beispiel mit Punkt P(u/v)

$f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 4{,}5$

$f(u) = -\frac{1}{6}u^2 + 4{,}5$



NB in HB $\frac{1}{2} \cdot u \cdot (-\frac{1}{6}u^2 + 4{,}5)$

HB $A = \frac{1}{2}\, a \cdot h$ NB $A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u)$ ZF $A(u) = -\frac{1}{12}u^3 + 2{,}25u$

Extremwerte ermitteln. Ergebnis: Max für $u = 3$ (NS) und $v = 4{,}5$ → $P(3 / 4{,}5)$

$A = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4{,}5 = 6{,}75$

Ganzrationale Funktionen bestimmen - Steckbriefaufgaben

1. Ansatz zur Bestimmung einer ganzrationalen Funktion (>Grad der Funktion)

2. Grades: $f(x) = ax^2 + bx + c$
$f'(x) = 2ax + b$
$f''(x) = 2a$

3. Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ usw.
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

2. Bedingungen aus gegebenen Informationen ermitteln (Anzahl der Unbekannten = Anzahl der notwendigen Bedingungen)

Bsp.: Informationen: 2. Grad, $S(1|2)$, $O(0|0)$
↪ Scheitelpunkt: m an der Stelle 1 ist 0

$S(1|2) \rightarrow f(1) = 2 \quad f'(1) = 0$
$O(0|0) \rightarrow f(0) = 0$

3. Aufstellen eines LGS zur Berechnung der Parameter (mit z.B. Additionsverfahren lösen)

$f(0) = 0 \quad 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
$\Rightarrow 0 = c$

$f(1) = 2 \quad 2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1$
$2 = a + b$

$f'(1) = 0 \quad 0 = 2 \cdot a \cdot 1 + b$
$0 = 2a + b$

I $\quad 2 = a + b$
II $\quad 0 = 2a + b$

II − I
$-2 = a$

a in I für b
$2 = (-2) + b \rightarrow 4 = b$

Funktion: $f(x) = -2x^2 + 4x$

Merke: HP und TP müssen am Ende überprüft werden, um herauszufinden, ob es eine Funktion mit den genannten Eigenschaften gibt

Bsp.: gewonnene Funktion: $f(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x + 0{,}5$ (angegeben war: $H(-1|2)$)
$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4}$
$f''(x) = \frac{18}{4}x$

Prüfe auf Hochpunkt:
$f''(-1) < 0 \quad \Rightarrow$ HP

Merke: bei Punktsymmetrie: alle Parameter mit geradem Exponenten streichen $ax^5 + \cancel{bx^4} + cx^3 + \cancel{dx^2} + ex + \cancel{f}$
bei Achsensymmetrie: alle Parameter mit ungeradem Exponenten streichen $\cancel{ax^4} + bx^3 + \cancel{cx^2} + dx + e$

Bedingungen

geht durch den Punkt P(2/7) $\quad f(2) = 7$
schneidet die y-Achse bei 5 $\quad f(0) = 5$
schneidet die x-Achse bei 3 $\quad f(3) = 0$
geht durch den Ursprung $\quad f(0) = 0$
hat an der Stelle x=4 einen Extrempunkt $\quad f'(4) = 0$
hat im Punkt T/H einen TP/H $\quad f(1) = 3 \quad f'(1) = 0$
berührt die x-Achse an der Stelle x=2 $\quad f(2) = 0 \quad f'(2) = 0$
hat an der Stelle x=1 einen Wendepunkt $\quad f''(1) = 0$
hat einen Wendepunkt auf der y-Achse $\quad f''(0) = 0$
hat im Punkt P(2/4) einen Sattelpunkt $\quad f(2) = 4 \quad f'(2) = 0 \quad f''(2) = 0$
hat an der Stelle x=3 eine Tangente mit der Steigung 8 $\quad f'(3) = 8$
hat bei x=4 eine Wendestelle, ihre Wendetangente hat die Steigung 4 $\quad f'(2) = 0 \quad f'(2) = 4$

Funktionen mit Parametern - Funktionenschar

Enthält ein Funktionsterm außer der Variablen x noch einen Parameter a, so gehört zu jedem a eine Funktion f_a, die jedem x den Funktionswert $f_a(x)$ zuordnet. Die Funktionen f_a bilden eine Funktionenschar.

Funktionenscharen untersuchen

Die Koordinaten der charakteristischen Punkte des Graphen einer Funktionenschar hängen häufig von dem Parameter ab. Für die Berechnung der Punkte werden die Parameter der Funktion wie eine Zahl behandelt.

Aufzeigen, dass alle durch den selben Punkt verlaufen

Bsp.: $f_a(x) = x^2 - 2ax + 8a - 16$

$S(4|0)$

1. x-Wert des gegebenen Punktes in Funktionenschar einsetzen

$f_a(4) = (4)^2 - 2 \cdot a \cdot 4 + 8a - 16 = 0$

2. interpretieren: wenn f (x) = y-Wert des gegebenen Punktes ist, dann laufen alle durch den Punkt

Extrempunkte bestimmen

Vorgehen wie bei normaler Extrempunktbestimmung ohne weiteren Parameter

$f_a(x) = x^2 + ax + 4$

$f_a'(x) = 2x + a$

$f_a''(x) = 2$

Notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$0 = 2x + a$

$-\frac{a}{2} = x$

Hinr. Bed.: $f_a'(x) = 0 \wedge f_a''(x) \neq 0$

$f_a''\left(-\frac{a}{2}\right) = 2 < 0$ TP

y-Wert:

$f_a\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + 4$

$\rightarrow TP\left(-\frac{a}{2} \,\middle|\, -\frac{a^2}{4} + 4\right)$

Für welchen Wert von a liegt der Extrempunkt auf der x-Achse?

y-Wert des Extrempunktes = 0 setzen, nach a auflösen

$0 = -\frac{a^2}{4} + 4 \rightarrow a = 4 \vee a = -4$

Für $a = -4$ oder $a = 4$ liegt der Extrempunkt auf der x-Achse

Ableitung und Steigung an einer Stelle

1. Ableiten

$f_a(x) = ax^3 - 3ax$

$f_a'(x) = 3ax^2 - 3a$

2. Steigung an der Stelle x=0

$f_a'(0) = 3a \cdot 0^2 - 3a$

$= -3a$

3. Für welchen Wert von a die Steigung 1? $f_a(0) = 1$

$-3a = 1$

$a = -\frac{1}{3}$

Schnittpunkt mit der x-Achse

1. Nullstellenbestimmung: $f_a(x) = 0$

2. y-Wert: x_0 in $f_a(x)$

Für welchen Wert von a liegt der Extrempunkt auf der y-Achse?

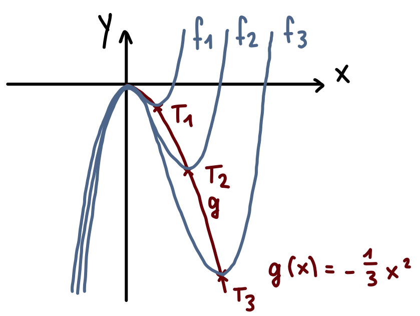
Bsp. $H\left(\frac{3a}{2} \,\middle|\, \frac{9a^2}{4} - 6a + 4\right)$

1. x-Wert des Extrempunktes = 0 setzen, nach Parameter a auflösen $0 = \frac{3a}{2} \rightarrow a = 0$

Ortskurve

Durchläuft der Parameter a alle zugelassen Werte, so liegen alle Tiefpunkte (oder andere charakteristischen Punkte) auf einer Kurve. Diese Kurve heißt Ortskurve oder Ortslinie

Beispiel: Für die Tiefpunkte der Graphen von f mit $f_a(x) = \frac{1}{3a}x^3 - x^2$ (mit a > 0) gilt $T_a\left(\underbrace{2a}_{x} \,\middle|\, \underbrace{-\frac{4}{3}a^2}_{g(x)}\right)$.



1. x-Koordinate des TP nach Parameter umformen

$x = 2a \rightarrow a = \frac{x}{2}$

2. Einsetzen des Terms in y-Koordinate des TP

$a = \frac{x}{2}$ in $y = -\frac{4}{3}a^2$

$\rightarrow y = -\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{1}{3}x^2$

Antwort: Alle Tiefpunkte liegen auf dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{3}x^2$

Rekonstruieren einer Größe

Wenn die Funktion f die Änderung einer Größe (z.B. in Abhängigkeit von der Zeit oder dem Ort) in einem Intervall [a; b] beschreibt, lässt sich die orientierte Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse als Gesamtänderung der Größe zwischen a und b deuten.

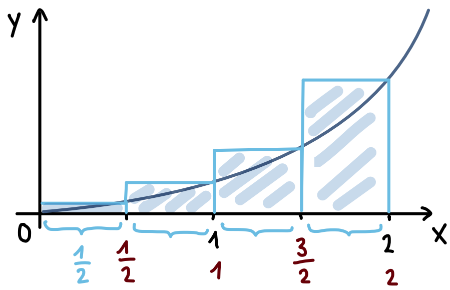
Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

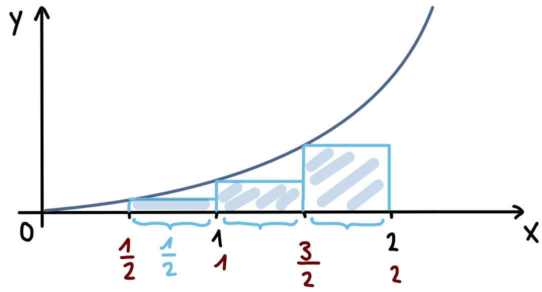
Ober- und Untersumme

Beispiel: O_4 und U_4 von $f(x) = x^3$ im $I[0;2]$

Obersumme



Untersumme



1. Intervallgrenze (hier 2) : Anzahl der gefragten Teile (hier 4) = Abstand (hier 1/2)
2. Berechnung: Abstand Rechtecke (hier 1/2) x Stellen in f(x) eingesetzt (für alle addieren)

Obersumme: hintere Intervallgrenze, vordere nicht

$$O_4 = \tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \tfrac{1}{2}\cdot(1)^3 + \tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{3}{2}\right)^3 + \tfrac{1}{2}\cdot 2^3$$
$$= \frac{25}{4} = 6{,}25$$

Untersumme: vordere Intervallgrenze, hintere nicht

$$U_4 = \tfrac{1}{2}\cdot(0)^3 + \tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \tfrac{1}{2}\cdot(1)^3 + \tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{3}{2}\right)^3$$
$$= \frac{9}{4} = 2{,}25$$

↓

- exakter Wert liegt zwischen Ober- und Untersumme
- je mehr Rechtecke (O_8, O_{12}, …), desto genauer ist das Ergebnis

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

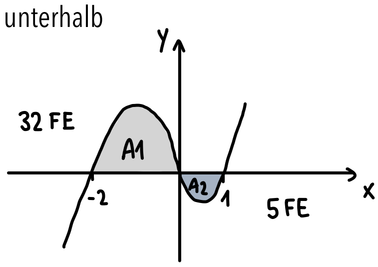
$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Orientierten und absoluten Flächeninhalt berechnen

Orientierter Flächeninhalt

> wird dann negativ gezählt, wenn er unterhalb der x-Achse liegt

Absoluter Flächeninhalt



$$f(x) = 12x\cdot(x+2)\cdot(x-1)$$
$$= 12x^3 + 12x^2 - 24x$$

1. Nullstellen bestimmen: f(x) = 0 $\quad 12x\cdot(x+2)\cdot(x-1) \rightarrow$ (SvNP) $\quad x_1 = 0 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = 1$

2. $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 27$ [FE]

$A_1 + A_2$
$$= \left|\int_{-2}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)\,dx\right| = |32| + |-5| = 37 \text{ [FE]}$$

Stammfunktionen

$F(x) = a \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$ $F'(x) \triangleq f(x)$

$f(x) = a x^n$

$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$

Potenzregeln

$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ $f(x) = \frac{2}{x^5} - \frac{7}{x^6} = 2x^{-5} + 7x^{-6}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ $a^n + a^m = a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $f(x) = \frac{x^2}{x^5} = x^{2-5} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

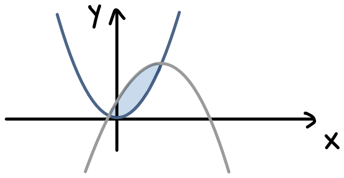
$\sqrt{}$

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}}$

$f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \rightarrow F(x) = \frac{1}{\frac{m}{n}+1} \cdot x^{\frac{m}{n}+1}$

Integral und Flächeninhalt - Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen

am Beispiel von $f(x) = x^2$
und $g(x) = -x^2 + 4x$



1. Schnittstellen berechnen

$f(x) = g(x)$

$-x^2 + 4x = x^2 \rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 2$

2. Differenzfunktion d(x) bilden

$d(x) = g(x) - f(x)$

$d(x) = -2x^2 + 4x$

3. davon die Stammfunktion

$D(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2$

4. Integral berechnen (Grenzen sind Schnittstellen)

$\int_0^2 (-2x^2 + 4x)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3}$

Wenn das Ergebnis negativ ist, hat man die Größen vertauscht und schreibt das Ergebnis in der Antwort einfach ohne Minus

Integralfunktionen

$J_u(x) = \int_u^x f(t)\,dt$

→ Integralfunktion f zur unteren Grenze u

→ $J'_u(x) = f(x)$

→ jede Integralfunktion J_u ist eine Stammfunktion von f

Unbegrenzte Flächen - Uneigentliche Integrale

$\int_1^z f(x)\,dx$ $\int_z^2 f(x)\,dx$

1. Integral mit z für fehlende Grenze berechnen

Bsp.: $A(z) = \int_z^{-1} (-4x^{-3})\,dx = \left[2x^{-2}\right]_z^{-1} = (2 \cdot (-1)^{-2}) - (2 \cdot z^{-2}) = 2 - 2z^{-2}$

2. Grenzwert überprüfen

$\lim_{z \to -\infty} = A(z) = \overset{2}{2} - 2z^{-2} = 2$

je größer z, desto kleiner

$\lim_{z \to \infty} = A(z) = \overset{-\infty}{(-6 \cdot \sqrt{z})} + \underset{6}{6} = -\infty$

Zahl z bestimmen zur Gleichung

Aufgabe: Bestimmen Sie die positive Zahl z, sodass die Gleichung erfüllt ist

$\int_0^z x\,dx = 18 = \left[0{,}5x^2\right]_0^z = (0{,}5 \cdot z^2) - (0{,}5 \cdot 0^2) = 18$

$18 = 0{,}5\,z^2$

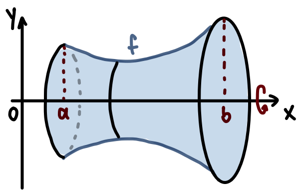
$\pm 6 = z$

$\rightarrow z = 6$

Mittelwert

$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

Integral und Rauminhalt - Rotationskörper



Gegeben ist eine Funktion f auf dem Intervall [a; b]. Rotiert die Fläche unter dem Graphen von f über [a; b] um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper / Drehkörper.

Sein Volumen beträgt:

$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$

Exponentialfunktionen

Während bei ganzrationalen Funktionen die Variable x immer als Basis auftritt, steht die Variable x bei Exponentialfunktionen im Exponenten. $\longrightarrow$ z.B. $f(x) = 2 \cdot 3^x$

Exponentialfunktionen spielen bei der Beschreibung von Wachstumsprozessen eine wichtige Rolle.

Exponentielle Zunahme und exponentielle Abnahme

Wenn sich bei einem Wachstumsvorgang ein Bestand in gleichen Zeitspannen immer um denselben Faktor a ändert, liegt exponentielles Wachstum vor.

Exponentielle Zunahme (a>1)

> streng monoton steigende Funktion

Eine Bakterienkultur mit anfangs 50 Mio. Bakterien wächst stündlich um 80%

Wachstumsfaktor a = 1 + p

$a = 100\% + 80\% = 180\% = 1{,}8$

Anfangsbestand f(0) = 50

$f(x) = 50 \cdot 1{,}8^x$

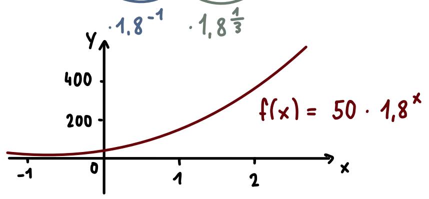
-1 $\quad +\frac{1}{3}$ gleiche Summanden

$+1 \quad +1$

x (in h)	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	2
f(x) in Mio	≈ 28	50	≈ 61	90	162

gleiche Faktoren $\quad \cdot 1{,}8 \quad \cdot 1{,}8$

$\cdot 1{,}8^{-1} \quad \cdot 1{,}8^{\frac{1}{3}}$



Exponentielle Abnahme (0<a<1)

> streng monoton abnehmende Funktion

Eine Bakterienkultur mit anfangs 50 Mio. Bakterien verringert sich stündlich um 40%

Wachstumsfaktor a = 1 - p

$a = 100\% - 40\% = 60\% = 0{,}6$

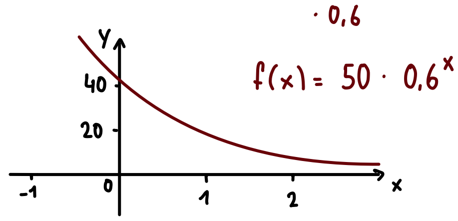
Anfangsbestand g(0) = 50

$g(x) = 50 \cdot 0{,}6^x$

$+1$

x (in h)	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	2
f(x) in Mio	≈ 83	50	≈ 42	30	18

$\cdot 0{,}6$



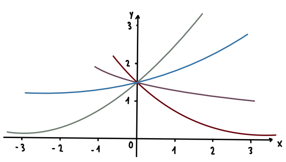
Wachstumsfaktor bestimmen

zwei Bestände kennen $\quad P(0|50) \quad Q(3|10{,}8) \quad 50 \cdot a^3 = 10{,}8 \quad a = 0{,}6$

$f(x) = c \cdot a^x \quad c \mathrel{\hat{=}}$ Anfangsbestand $\quad a \mathrel{\hat{=}}$ Wachstumsfaktor $\quad \rightarrow f(x) = 50 \cdot 0{,}6^x$

Eigenschaften der Exponentialfunktion

- keine Nullstellen, verläuft oberhalb der x-Achse
- Graph durch Punkt (0/c)
- für sehr große x-Werte (a<1) oder sehr kleine (a>1) nähern sich die Funktionswerte der x-Achse an (asymptotisch)



Modellfunktion aufstellen

$m(x) = y_1 \cdot e^{k \cdot x_2} \quad P_1(0|1{,}82 \cdot 10^9) \quad P_2(1|1{,}875 \cdot 10^9)$

1. Wachstumsfaktor bestimmen
2. Punkte in $y_1 \cdot e^{k \cdot x_2} = y_2$ einsetzen
   $(1{,}82 \cdot 10^9) \cdot e^{k \cdot 1} = (1{,}875 \cdot 10^9)$
3. nach k auflösen $\quad$ CAS: $k \approx 0{,}0298$
4. einsetzen in Ansatz $\quad m(x) = 1{,}82 \cdot 10^9 \cdot e^{0{,}0298 \cdot x}$

Logarithmus

Die Lösung einer Exponentialgleichung $a^x = b$ $(a, b > 0)$ bezeichnet man als $\log_a(b)$ (sprich: Logarithmus von b zur Basis a). Der $\log_a(b)$ ist diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.

$a^x = b$ | x gesucht z.B. $3^x = 9$ $\log_3(9) = 2$ (CAS)

$\log_a(b) = x$

Bedingungen

1. $a > 0$

$\log_0(8) = x$

$0^x \neq 8$

> keine Lösung, weil $0^x \neq 0$

2. $a \neq 1$

$\log_1(4) = 0$

$1^0 \neq 4$

> keine Lösung, weil $1^x = 1$

3. $b > 0$

$\log_4(-12) = x$

$4^x = -12$

> keine Lösung, weil eine positive Potenz nichts negatives ergeben kann

Logarithmusgesetze

$\log_a(b \cdot b) = \log_a(b) + \log_a(b)$

$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$

$\log_a(u^v) = v \cdot \log_a(u)$

$\log_a(\sqrt[v]{u}) = \frac{1}{v} \cdot \log_a(u)$

Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung

Für die Ableitung von Exponentialfunktionen vom Typ $f(x) = a^x (a>0)$ gilt: $f'(x) = f'(0) \cdot a$. Es gibt eine Basis $e \approx 2{,}71828$, für die die Exponentialfunktion mit $f(x) = e^x$ exakt mit ihrer Ableitungsfunktion übereinstimmt. Diese Zahl e heißt Euler'sche Zahl. Die zugehörige Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ heißt natürliche Exponentialfunktion. Für $f(x) = e^x$ gilt $f'(x) = e^x$. Außerdem ist F mit $F(x) = e^x$ eine Stammfunktion von f.

Natürlicher Logarithmus - Ableiten und Aufleiten von Exponentialfunktionen

Für eine positive Zahl b heißt die Lösung x der Exponentialfunktion $e^x = b$ der natürliche Logarithmus von b. Man schreibt $x = \ln(b)$. Es gilt $e^{\ln(b)} = b$ und $\ln(e^c) = c$.

bisher:

$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$

$\uparrow$

$f(x) = a \cdot x^n$

$\downarrow$

$f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$

$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot e^{\ln(a) \cdot x} = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$

$\uparrow$

$f(x) = a^x = e^{\ln(a) \cdot x}$

$\downarrow$

$f'(x) = \ln(a) \cdot e^{\ln(a) \cdot x} = \ln(a) \cdot a^x$

$F(x) = \frac{1}{k} \cdot e^{kx}$

$\uparrow$

$f(x) = e^{kx}$

$\downarrow$

$f'(x) = k \cdot e^{kx}$

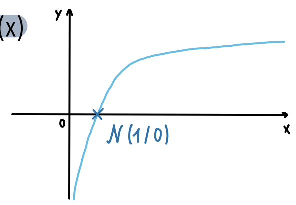
Ableiten von e

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$2e^x$	$2e^x$
$10 + 3e^x$	$3e^x$
e^{2x}	$2 \cdot e^{2x}$
$20 \cdot e^{x^3}$	$3x^2 \cdot 20e^{x^3}$
$2x + e^{-4x^3}$	$2 + (-12x^2) \cdot e^{-4x^3}$
$10x^2 + e^{4x^2}$	$20x + 8x \cdot e^{4x^2}$

Stammfunktion mit e

$f(x)$	$F(x)$
e^x	e^x
$2e^x$	$2e^x$
e^{3x}	$\frac{1}{3} \cdot e^{3x}$
$2x + 3e^{10x}$	$x^2 + \frac{1}{10} \cdot 3e^{10x}$

Graph ln(x)



Beispiele

$f(x) = 0{,}25^x = e^{\ln(0{,}25) \cdot x}$

$f'(x) = \ln(0{,}25) \cdot 0{,}25^x$

$F'(x) = \frac{1}{\ln(0{,}25)} \cdot 0{,}25^x$

$f(x) = 8^x$

$f'(x) = \ln(8) \quad 8^x$

$F(x) = \frac{1}{\ln(8)} \cdot 8^x$

Wichtig

$\ln(1) = 0$ $\ln(e) = 1$ / $\ln(2{,}8) = 1$ $\log_e(1) = \ln(1) = 0 = x$

Beschränktes Wachstum

Funktionsdarstellung: $f(x) = S - c \cdot a^x = S - e^{kx}$ mit $k = \ln(a)$

$(0 < a < 1$ bzw. $k < 0)$

Es gilt: $c = S - f(0)$

Beschränktes Wachstum mit der Schranke S liegt vor, wenn die Differenzen zwischen einer Schranke S und dem Bestand zum Zeitpunkt t exponentiell abnehmen.

Ein Bestand beträgt anfangs 2, nach einem Zeitschritt 5 und wächst begrenzt gegen die Schranke S=10

Ansatz: $f(x) = 10 - c \cdot e^{kx}$

Aus $f(0) = 2$ folgt. $c = 10 - 2 = 8$

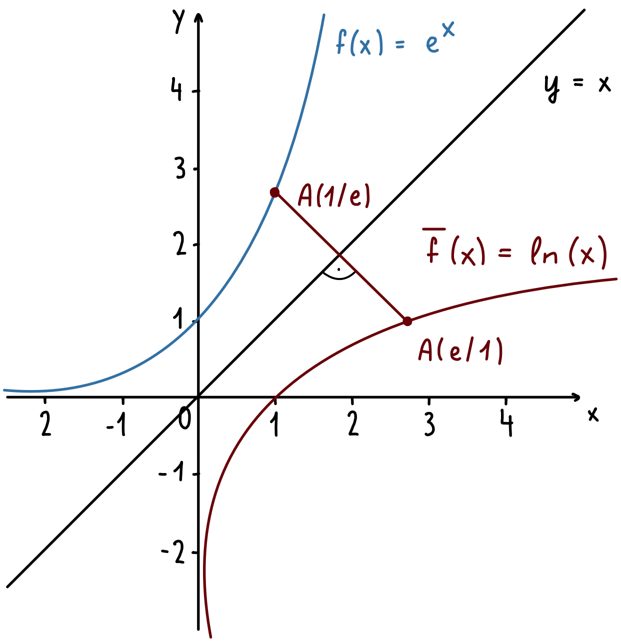
Aus $f(1) = 5$ folgt: $10 - 8e^k = 5$,

also $k = \ln(0{,}625) \approx -0{,}47$

Funktionsdarstellung:

$$f(x) = 10 - 8 \cdot e^{-0{,}47x}$$

Logarithmusfunktion und Umkehrfunktion



Eine Funktion f heißt umkehrbar, wenn es zu jedem y aus der Wertemenge von f genau ein x aus der Definitionsmenge von f mit f(x)=y gibt.

Die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ heißt natürliche Logarithmusfunktion ln mit $\ln(x) = \bar{f}(x)$; $x \in \mathbb{R}^+$.

$F(x) = \ln(x)$	$f(x) = \ln(x)$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

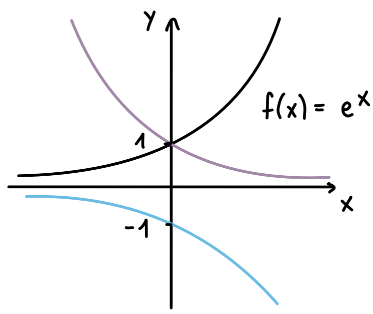
Allgemein lässt sich die Umkehrbarkeit einer Funktion f daran erkennen, dass jede Parallele zur x-Achse den Graphen von f höchstens einmal schneidet. Dies ist sicher der Fall, wenn f streng monoton wachsend oder fallend ist.

Für die Definitionsmenge D und die Wertemenge W der natürlichen Logarithmusfunktion gilt:

$f(x) = e^x$	$\bar{f}(x) = \ln(x)$
$D_f = \mathbb{R}$	$D_{\bar{f}} = \mathbb{R}^+$
$W_f = \mathbb{R}^+$	$W_{\bar{f}} = \mathbb{R}$

Streckung/Stauchung, Spiegelung und Verschiebung

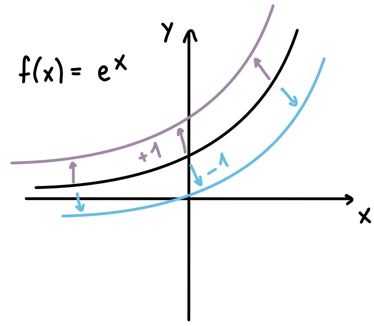
Spiegelung



an der y-Achse: $f(x) = e^{-x}$

an der x-Achse: $f(x) = -e^x$

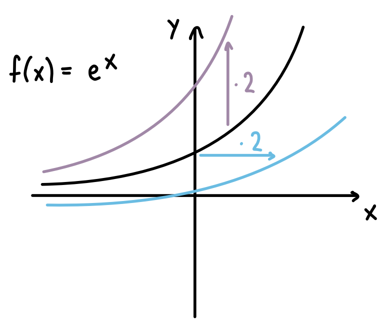
Verschiebung



an der y-Achse: $f(x) = e^x + 1$

an der x-Achse: $f(x) = e^x - 1$

Streckung / Stauchung



an der y-Achse: $f(x) = 2 \cdot e^x$

an der x-Achse: $f(x) = e^{2x}$

Exponentialfunktionen im Sachzusammenhang

Exponentielles Wachstum bzw. exponentielle Abnahme liegt vor, wenn ein Bestand von einem Zeitschritt zum nächsten um den gleichen Wachstumsfaktor a zu- bzw. abnimmt. Den Bestand zum Zeitpunkt t kann man dann mithilfe einer Funktion f mit $f(t) = f(0) \cdot a^t$ bestimmen. Mit $k=\ln(a)$ gilt auch $f(t) = f(0) \cdot e^{kt}$.
Die Ableitung f' mit $f'(t) = f(0) \cdot k \cdot e^{kt}$ beschreibt die Wachstumsgeschwindigkeit des Bestandes zum Zeitpunkt t.

Verdopplungs- und Halbwertszeit

Man nennt die Zeit, in der sich der Anfangsbestand verdoppelt bzw. halbiert Verdopplungszeit T_V bzw. Halbwertszeit T_H.

Verdopplungszeit: $T_V = \frac{\ln(2)}{k}$ Halbwertszeit: $T_H = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{k}$ $k \mathrel{\hat{=}}$ Wachstumsfaktor

Bei jedem beliebigen Bestand: Verdoppeln: $f(x + T_V) = f(x) \cdot 2$ Halbieren: $f(x + T_H) = f(x) \cdot \frac{1}{2}$

Neue Funktionen aus alten Funktionen - Summe, Produkt, Verkettung

Gegeben sind die Funktionen u (> äußere Funktion) und v (> innere Funktion). In der Funktion u wird die Variable x durch den Term v(x) ersetzt. Die entstandene neue Funktion nennt man Verkettung von u und v und schreibt $u \circ v$ mit $(u \circ v)(x) = u(v(x))$.

Beispiel: $u(x) = e^x$ $v(x) = 2x + 1$ $\longrightarrow$ $u(v(x)) = e^{2x+1}$

Zusammengesetzte Funktionen im Sachzusammenhang

Wenn eine dreimal differenzierbare Funktion f die Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze in cm/Woche nach t Wochen beschreibt (vgl. Fig. 1), so ergeben sich z. B. folgende Zusammenhänge:

Frage im Sachzusammenhang	Frage bei der Funktionsuntersuchung	Mögliche Rechenverfahren
Wann wächst die Pflanze nicht?	Wo hat die Funktion f Nullstellen?	Lösen der Gleichung $f(x) = 0$.
Wann ist die Wachstumsgeschwindigkeit am größten?	Wo erreicht die Funktion f ihr Maximum?	Bestimmen von Hochpunkten; Verhalten von f an den Definitionsrändern berücksichtigen.
Wann nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit am stärksten ab?	Wo erreicht die Ableitung von f ihr Minimum?	Bestimmen der Wendepunkte von f; Verhalten von f' an den Definitionsrändern berücksichtigen.
Wie viel ist die Pflanze in den ersten vier Wochen gewachsen?	Welchen orientierten Flächeninhalt schließt der Graph von f mit der x-Achse im Intervall [0; 4] ein?	Berechnung des Integrals: $\int_0^4 f(t)\,dt$
Wie hoch ist die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit innerhalb der ersten vier Wochen?	Welchen Mittelwert hat die Funktion f im Intervall [0; 4]?	Berechnung des Mittelwertes der Funktion mithilfe des Integrals: $\frac{1}{4-0} \cdot \int_0^4 f(t)\,dt$

Eigenschaften von Funktionen

Eigenschaft + Rechenverfahren

Nullstellen
$f(x) = 0$

Symmetrie zur y-Achse
$f(x) = f(-x)$

Symmetrie zum Ursprung
$f(x) = -f(x)$

Monotonie
$f'(x) > 0$ od. $f'(x) < 0$

Graph ist linksgekrümmt
$f''(x) > 0$

Graph ist rechtsgekrümmt
$f''(x) < 0$

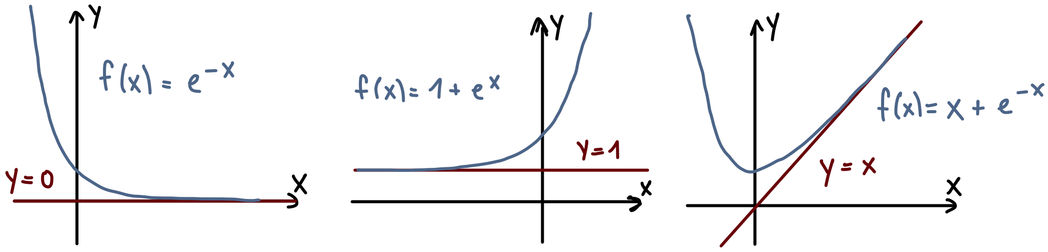
Extrempunkte
$f'(x) = 0$ $f''(x) \neq 0$ od. VZW f''

Wendepunkte
$f''(x) = 0$ $f'''(x) \neq 0$ od. VZW f'''

Flächeninhalt
$A = \int_a^b f(x)\,dx$

Untersuchung von zusammengesetzten Exponentialfunktionen

Schaut man sich das Verhalten von Exponentialfunktionen des Graphen für $x \to \pm\infty$ an, so können folgende Fälle eintreten:



$f(x) = e^{-x}$ nähert sich für $x \to \infty$ der x-Achse immer mehr an

$f(x) = 1 + e^x$ nähert sich für $x \to -\infty$ der Geraden mit der Gleichung $y = 1$ immer mehr an

$f(x) = x + e^{-x}$ nähert sich für $x \to \infty$ der Geraden mit der Gleichung $y = x$ immer mehr an

Eine Gerade, der sich der Graph immer stärker „anschmiegt", heißt Asymptote

Für $x \to \infty$ dominiert e^x über x^n

Allgemein gilt:

Für $x \to \infty$ gilt für $n \in \mathbb{N}$: $\frac{x^n}{e^x} = x^n \cdot e^{-x} \to 0$ und $x^n \cdot e^x \to \infty$

Für $x \to -\infty$ gilt für gerade $n \in \mathbb{N}$: $x^n \cdot e^x \to 0$ und $\frac{x^n}{e^x} = x^n \cdot e^{x} \to \infty$

Für $x \to -\infty$ gilt für ungerade $n \in \mathbb{N}$: $x^n \cdot e^x \to 0$ und $\frac{x^n}{e^x} = x^n \cdot e^{-x} \to -\infty$

Untersuchung von zusammengesetzten Logarithmusfunktionen

Für $x \to \infty$ und $x \to 0$ dominiert x^n über den ln(x)

Allgemein gilt:

Für $x \to 0$ gilt für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ $x^n \ln(x) \to 0$ und $\frac{\ln(x)}{x^n} \to -\infty$

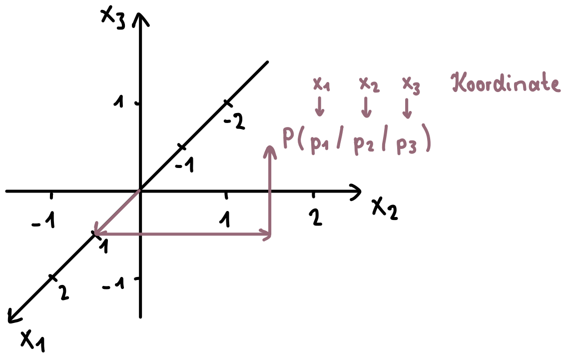
Für $x \to \infty$ gilt für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. $x^n \cdot \ln(x) \to \infty$ und $\frac{\ln(x)}{x^n} \to 0$

Verhalten von e-Funktionen

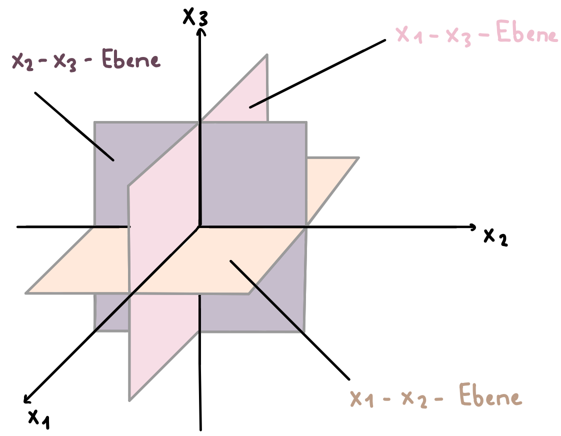
für $x \to \infty$: $e^{-x} \to 0$	für $x \to -\infty$: $e^{-x} \to \infty$
fur $x \to \infty$: $e^{x} \to \infty$	für $x \to -\infty$: $e^{x} \to 0$

Geometrie (Vektoren)

3-D-Koordinatensystem



Ebenen und Punkte



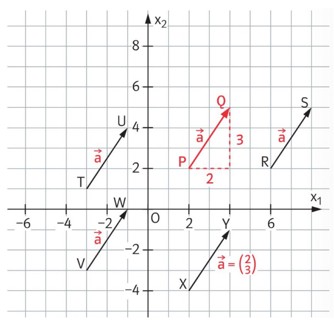
Punkte auf der x_1-Achse mit $P(p_1/0/0)$
Punkte auf der x_2-Achse mit $P(0/p_2/0)$
Punkte auf der x_3-Achse mit $P(0/0/p_3)$

Punkte in der x_1-x_2-Ebene mit $P(p_1/p_2/0)$
Punkte in der x_2-x_3-Ebene mit $P(0/p_2/p_3)$
Punkte in der x_1-x_3-Ebene mit $P(p_1/0/p_3)$

Vektoren als Verschiebung von Punkten

Verschiebungen im Koordinatensystem können durch Vektoren beschrieben werden.

Beispiel: Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ gibt an, dass man den Zielpunkt erreicht, indem man vom Ausgangspunkt 2 Einheiten in Richtung der x_1-Achse und 3 Einheiten in Richtung der x_2-Achse geht



Koordinaten eines Vektors bestimmen

Die Koordinaten eines Vektors $\overrightarrow{AB}$ kann man aus den Koordinaten der Punkte $A(a_1/a_2/a_3)$ und $B(b_1/b_2/b_3)$ bestimmen.

Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

Ortsvektor

Der Vektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, der vom Ursprung zu einem Punkt $P(p_1/p_2/p_3)$ geht, heißt Ortsvektor von P.

Beispiel: Punkt $A(3/2/7)$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Gegenvektor

Ein Vektor, der die umgekehrte Verschiebung vom Zielpunkt zum Ausgangspunkt beschreibt, d.h. zwar gleich lang, aber in die entgegengesetzte Richtung orientiert ist, nennt man Gegenvektor.

Es gilt: Gegenvektor zu $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ ist $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$

Beispiel: Gegenvektor zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist $-\vec{a} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Länge einer Strecke / Betrag eines Vektors

In der Geometrie bezeichnet man die Länge eines Pfeils, der den Vektor $\vec{a}$ repräsentiert, als Betrag des Vektors $\vec{a}$. Für den Betrag eines Vektors $\vec{a}$ schreibt man $|\vec{a}|$.

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$

Der Abstand zweier Punkte ist gleich dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

Es gilt: $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Rechnen mit Vektoren

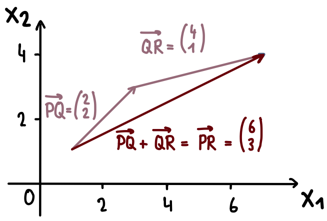
Addition

Wenn man zwei Verschiebungen hintereinander durchführt, ergibt sich wieder eine neue Verschiebung. Den zugehörigen Vektor erhält man durch Addition der beiden Verschiebungen.

Beispiel:

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

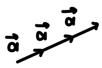


Multiplikation

Führt man dieselbe Verschiebung entlang des Vektors $\vec{a}$ r-fach hintereinander durch, so ergibt sich der Vektor der daraus resultierenden Verschiebung $\vec{c}$ aus der Multiplikation der Anzahl r mit dem Vektor $\vec{a}$. Diese Multiplikation wird als Skalarmultiplikation bezeichnet.

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \quad a_3 \end{pmatrix}$

$3 \cdot \vec{a}$



$\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 3 \cdot \vec{a} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Substraktion

Die Subtraktion entspricht der Addition seines Gegenvektors, d.h. · $\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$ oder $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

Rechengesetze

Für die Addition der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gelten:

Kommutativgsetz

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Assoziativgesetz

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Für die Multiplikation von reellen Zahlen r und s mit den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gelten:

Assoziativgesetz

$(r \cdot s) \cdot \vec{a} = r \cdot (s \cdot \vec{a})$

Distributivgesetz

$r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$

Mittelpunkt einer Strecke bestimmen

M der Strecke $\overline{PQ}$ mit $P(2|5)$ und $Q(4|3)$

$\overrightarrow{0M} = \overrightarrow{0P} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

oder

Mittelwert Koordinaten

$M_{\overrightarrow{PQ}}\left(\frac{p_1 + q_1}{2} \middle| \frac{p_2 + q_2}{2}\right) \qquad M_{\overrightarrow{PQ}}\left(\frac{2+4}{2} \middle| \frac{5+3}{2}\right) \qquad M_{\overrightarrow{PQ}}(3|4)$

Kollinearität

Einen Ausdruck wie $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$ nennt man Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Die Zahlen r, s und t heißen Koeffizienten. Wenn zwei Vektoren Vielfache voneinander sind, dann heißen sie kollinear. Die zugehörigen Pfeile sind parallel zueinander.

So sind z.B. die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}$ kollinear, weil $2 \cdot \vec{a} = \vec{b}$ gilt.

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 25 \end{pmatrix}$

$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 25 \end{pmatrix}$ → kollinear

N.R.: $3 \cdot 15 = \frac{1}{5}$ $\quad 5 \cdot 25 = \frac{1}{5}$ → gleich

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ r \end{pmatrix}$ $\qquad 4 : 16 = \frac{1}{4}$

$7 : r = \frac{1}{4} \quad | \cdot r$

$7 = \frac{1}{4} r \quad | \cdot 4$

$28 = r$ $\quad \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 28 \end{pmatrix}$

r und s so bestimmen, dass $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ kollinear sind

Aufgabe: Bestimmen Sie r und s so, dass $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ kollinear sind. $\quad A(2|1|7) \quad B(3|4|5) \quad C(5|r|s)$

$\rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ r-4 \\ s-5 \end{pmatrix}$ $\quad$ kollinear, wenn $x \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ $\quad x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ r-4 \\ s-5 \end{pmatrix}$

$x \cdot 1 = 2 \quad \} \; x = \frac{1}{2}$

$x \quad 3 = r - 4$ $\quad$ in beide einsetzen

$x \cdot (-2) = s - 5$

$\frac{1}{2} \quad 3 = r - 4$

$\frac{11}{2} = r$

$\frac{1}{2} \cdot (-2) = s - 5$

$4 = s$

$\Rightarrow C(5|5{,}5|4)$

Lösung für r und s bestimmen

$r \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Gleichungssystem aufstellen:

I $\quad r \cdot 0{,}5 + s \cdot 3 = -1$

II $\quad r \cdot 1{,}5 + s \cdot (-0{,}2) = -3$

Additionsverfahren. $\quad$ II − 3 · I

$-3{,}2 s = 0$

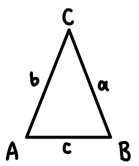
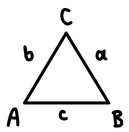
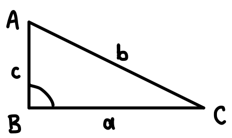
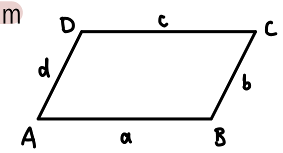
$s = 0$

in I einsetzen:

$r \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 3 = -1 \quad \rightarrow r = -2$

Kontrolle: $-2 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ✓

Eigenschaften bei Figuren

Figur	Eigenschaften der Figur	Mathematischer Ansatz
Gleichschenkliges Dreieck 	Zwei Seiten des Dreiecks sind gleich lang.	$\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$
Gleichseitiges Dreieck 	Alle Seiten des Dreiecks sind gleich lang.	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert$
Rechtwinkliges Dreieck 	Ein Dreieck ist rechtwinklig, wenn in dem Dreieck der Satz des Phythagoras gilt.	$\lvert\vec{a}\rvert^2 + \lvert\vec{c}\rvert^2 = \lvert\vec{b}\rvert^2$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2 + \lvert\overrightarrow{BC}\rvert^2 = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert^2$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2 + \lvert\overrightarrow{BC}\rvert^2 = \lvert\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\rvert^2$
Parallelogramm 	Jeweils zwei gegenüberliegende Seiten eines Vierecks sind parallel zueinander.	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Geraden

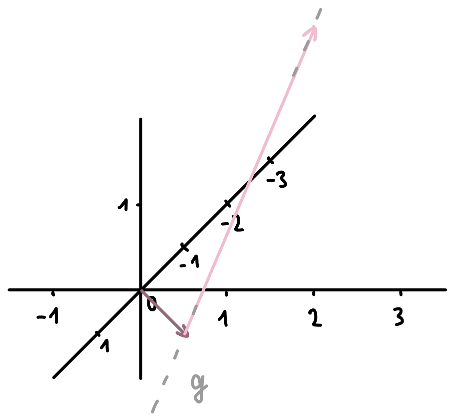
Jede Gerade lässt sich durch eine Gleichung der Form $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ $(r \in \mathbb{R})$ beschreiben.
Der Vektor $\vec{p}$ heißt Stützvektor. Er ist der Ortsvektor zu einem Punkt P, der auf der Geraden g liegt. Der Vektor $\vec{u}$ heißt Richtungsvektor.

Beispiel: Gerade g: $A(3|7|6)$; $B(4|5|1)$ $\quad \vec{OA} = \begin{pmatrix}3\\7\\6\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}$ $\quad \rightarrow$ also: $\vec{x} = \vec{OA} + s \cdot \vec{AB}$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\7\\6\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}$$

Zeichnen

Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$



Vorgehen:
1. vom Ursprung aus einen Pfeil des Stützvektors zeichnen
2. vom Endpunkt von diesem Pfeil den Richtungsvektor zeichnen
3. Gerade g durch Richtungsvektor zeichnen

Punktprobe

> Liegt der Punkt auf der Geraden?

$A(4|5|1)$ auf $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\7\\6\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}$? $\rightarrow$ gleichsetzen: $\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\7\\6\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}$

$4 = 3 + s \cdot 1$ $\quad 5 = 7 + s \cdot (-2)$ $\quad 1 = 6 + s \cdot (-5)$ $\quad$ | nach s auflösen

$1 = s$ $\quad 1 = s$ $\quad 1 = s$

$\Rightarrow$ Punkt liegt auf der Geraden, da immer $s = 1$ $\quad \rightarrow$ wenn unterschiedlich nicht

Gegenseitige Lage von Geraden

Parallel bzw. identisch

Sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\7\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-9\\3\\-6\end{pmatrix}$ parallel zueinander?

parallel: (h, g)
(keine gemeinsamen Punkte)

identisch:
schneiden sich die ganze Zeit

1. Untersuchung der Richtungsvektoren

$x \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\3\\-6\end{pmatrix}$ $\rightarrow x = -3$ $\quad$ N.R. $(-9):3 = -3$ $\quad 3:(-1) = 3$ $\quad -6:2 = -3$

$\rightarrow$ parallel, weil $3 \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\3\\-6\end{pmatrix}$ ist $\rightarrow$ gleiche Richtung, auch identisch?

2. LGS $\quad$ widersprüchliche Lösungen $\rightarrow$ kein SP $\rightarrow$ parallel $\quad$ gleiche Lösungen $\rightarrow$ identisch

$g: \vec{x}$ = Stützvektor von h $\quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\\4\end{pmatrix}$

$1 + t \cdot 3 = 5 \rightarrow t = \frac{5}{3}$ $\quad 1 + t \cdot (-1) = 7 \rightarrow t = 6$ $\quad 0 + t \cdot 2 = 4 \rightarrow t = 2$ $\quad \Rightarrow$ unterschiedlich, d.h. parallel

Schneidend bzw. windschief

schneidend: SP $\quad$ windschief: kein SP, mind. 3-D-Raum

Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-2\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-6\\-1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

1. Untersuchung der Richtungsvektoren

$x \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ $\quad 1:2 = \frac{1}{2}$ $\quad 1:3 = \frac{1}{3}$ $\quad 2:1 = 2$ $\quad \rightarrow \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ schneidend oder windschief

2. Gleichsetzen von g und h $\quad \begin{pmatrix}7\\-2\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-6\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

I $\quad 7 + 2r = 4 + s$ $\quad$ CAS: solve ({ I, II, III }, r, s)

II $\quad -2 + 3r = -6 + s$ $\quad \rightarrow r = -1 \wedge s = 1$

III $\quad 2 + r = -1 + 2s$ $\quad$ Lösung: SP $\quad$ keine: windschief

3. r in g und t in h einsetzen

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-6\\-1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-5\\1\end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow SP(5|-5|1)$

Gegenseitige Lage von Geraden

Übersicht zum Vorgehen

Vorgehen bei der Bestimmung, wie zwei Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$ zueinander liegen:

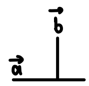
Sind die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zueinander parallel?

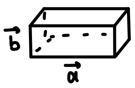
- Ja – parallel oder identisch?
  - Hat die Gleichung $g: \vec{x} =$ Stützvektor von $h: \vec{x}$ gleiche Lösungen?
    - Ja – identisch
    - Nein – parallel
- Nein – schneidend oder windschief?
  - Hat die Gleichung $\vec{p} + r \cdot \vec{u} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$ eine Lösung?
    - Ja – schneidend
    - Nein – windschief

Zueinander orthogonale Vektoren - Skalarprodukt

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

orthogonal = senkrecht zueinander





Es gilt: Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\quad (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0)$

Orthogonalität bei Geraden nachprüfen

Es gilt: Zwei sich schneidende Geraden sind dann orthogonal, wenn ihre Richtungsvektoren orthogonal sind

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = (-4) \cdot 2 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot (-1) = (-8) + 9 - 1) = 0 \rightarrow$ orthogonal

CAS: $\text{dotP}([\vec{a}], [\vec{b}]) = 0$ $\quad$ menu 7 c 3

Geradengleichung bestimmen

Aufgabe: Gleichung der Geraden h angeben, die die Gerade g orthogonal schneidet $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

Ortsvektor aus g

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt Richtungsvektor = 0

$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ vertauschen $\rightarrow \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

+ bei einer Zahl VZW, eine Zahl wird 0

Winkel zwischen Vektoren - Skalarprodukt

$\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

- wenn der Winkel größer als 90° oder das Skalarprodukt negativ ist, dann gilt: $\cos(180° - \alpha)$
- wenn das Skalarprodukt = 0 ist, dann beträgt der Winkel 90° (orthogonal)

A(2|3|7) $\quad$ B(-2|1|4) $\quad$ C(8|-4|2) $\quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-4) \cdot 6 + (-2) \cdot (-7) + (-3) \cdot (-5) = 5$

$|\vec{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$ $\quad |\vec{AC}| = \sqrt{6^2 + (-7)^2 + (-5)^2} = \sqrt{110}$

$\cos(\alpha) = \dfrac{5}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{110}}$

$\cos^{-1}\left(\dfrac{5}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{110}}\right) = 84{,}9$

$\Rightarrow 84{,}9°$

Geometrische Objekte und Situationen im Raum

Spieglung eines Punktes an einem Punkt

$$P \xrightarrow{\overrightarrow{PQ}} Q \xrightarrow{\overrightarrow{PQ}} P'$$

$P(1|-2|2)$ an $Q(3|1|-1)$ spiegeln

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\4\\-4\end{pmatrix} \rightarrow P'(5|4|-4)$$

Schattenpunkt bestimmen

Spitze $S(10|5|42)$ Sonnenstrahlen aus Richtung mit Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix}$ x_1-x_2-Ebene (Boden) $\rightarrow x_3 = 0$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\5\\42\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix}$ also: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\5\\42\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix} \rightarrow t = 8{,}4$ ↳ einsetzen

$S'(10 + 8{,}4 \cdot 4 \mid 5 + 8{,}4 \cdot 2 \mid 0) \Rightarrow S'(43{,}6 \mid 21{,}8 \mid 0)$

Ebenen im Raum - Parameterform

Parametergleichung einer Ebene:

$$\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

Stützvektor (Ortsvektor) Spannvektoren → nicht kollinear

Parametergleichung mit Punkten aufstellen

$A(10|5|2)$ $B(3|7|6)$ $C(10|5|1)$

$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

$\rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\5\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-7\\2\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

Punktprobe

Liegt $P(7|1|8)$ in Ebene?

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

gleichsetzen: $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\\8\end{pmatrix}$

LGS:
- I $2 + r + 2s = 7$
- II $3r - 1s = 1$
- III $1 + 5r + s = 8$

↳ lösen, wenn Ergebnis: Punkt in Ebene

Lagebeziehungen Gerade und Ebene

Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ Ebene $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

gleichsetzen: $a \cdot (p_1 + t \cdot u_1) + b \cdot (p_2 + t \cdot u_2) + c \cdot (p_3 + t \cdot u_3) = d$ → Gleichung lösen

- $g: \vec{x} \parallel E$ parallel > keine Lösung, unwahre Aussage (z.B. beim LGs 0=4)
- $g: \vec{x} \in E$ Element > keine Lösung, wahre Aussage (z.B. 4=4)
- Schnittpunkt > beim Gleichsetzen eindeutige Lösungen für Parameter ⟶ für Ortsvektor des Durchstoßpunktes Parameter in Gleichung einsetzen
- liegt in Ebene > unendlich viele Lösungen

Spurpunkte

SP Gerade g mit Koordinatenebenen

x_1-x_2-Ebene: $S(x_1|x_2|0)$

x_1-x_3-Ebene: $S(x_1|0|x_3)$

x_2-x_3-Ebene: $S(0|x_2|x_3)$

SP Ebene E mit Koordinatenachsen

auf x_1-Achse: $S(x_1|0|0)$

auf x_2-Achse: $S(0|x_2|0)$

auf x_3-Achse: $S(0|0|x_3)$

Normalenvektor (Kreuzprodukt/Vektorprodukt)

n ist Normalenvektor einer Ebene E, steht in jedem Punkt orthogonal zur Ebene, orthogonal zu den beiden bekannten Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Ebene E

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 \cdot v_3 - v_2 \cdot u_3 \\ u_3 \cdot v_1 - v_3 \cdot u_1 \\ u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2 \end{pmatrix}$$

~~u_1 v_1~~
u_2 v_2
u_3 v_3
u_1 v_1
u_2 v_2
~~u_3 v_3~~

Normalengleichung und Koordinatengleichung

Normalengleichung: $(\vec{x} - \vec{p})\ \vec{n} = 0$ $\quad P(1|2|3)\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

↳ Winkel

Koordinatengleichung: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \qquad d = \vec{p} \cdot \vec{n}$ (Skalarprodukt!)

↳ Punkte

↳ ein Normalenvektor der Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Punktprobe → Liegt $P(5|2|3)$ drauf?

$2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 28 \neq 20$ → nein

Lage - Ebene und Normalform

1. zu einem Punkt > Punktprobe

Punkt in Ebene einsetzen, auf Konsistenz (z.B. 4=4) prüfen

$E: 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \qquad P_1(1|2|3) \qquad P_2(5|4|3) \qquad P_3(0|0|0)$

↳ P_1 in E $\quad 2 \cdot 1 + 2 + 3 \cdot 3 = 0$
$13 = 0$
↯ $P \notin E$

↳ P_2 in E $\quad 2 \cdot 5 + 4 + 3 \cdot 3 = 0$
$23 = 0$
↯ $P_2 \notin E$

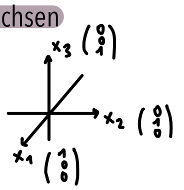
↳ P_3 in E $\quad 2 \cdot 0 + 0 + 3 \cdot 0 = 0$
$0 = 0$
✓ $P_3 \in E$

2. parallel zu den Koordinatenachsen

zur x_1-Achse: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

zur x_2-Achse: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ 0 \\ n_3 \end{pmatrix}$

zur x_3-Achse: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix}$



3. parallel zu den Koordinatenachsenebenen

zur x_1-x_2-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n_3 \end{pmatrix}$

zur x_2-x_3-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

zur x_1-x_3-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen > Spurpunkte

$E: \vec{x} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3 = 0$

mit der x_1-Achse: x_2 und $x_3 = 0 \qquad x_1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 3 = 0$
$x_1 = 3 \quad \rightarrow \quad S_1(3|0|0)$

mit der x_2-Achse: x_1 und $x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad S_2(0|6|0)$

mit der x_3-Achse: x_1 und $x_2 = 0 \quad \rightarrow \quad S_3(0|0|1)$

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Abstand eines Punktes R von einer Geraden = kleinste Entfernung von R zu g

$R(1|2|0{,}08)$ $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ $\quad (1 \text{ LE} \mathrel{\hat=} 1 \text{ km})$

1. Hilfsebene orthogonal zu g und durch Punkt R

$\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

$E: 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 = d$ $\quad d = \vec{p}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\0{,}08\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 0{,}08\cdot 1 = 8{,}08$

$\hookrightarrow E: 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 8{,}08$

2. Schnittpunkt F der Geraden g mit der Hilfsebene

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1+2t\\1+3t\\1t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ $\hookrightarrow$ in E

$\hookrightarrow 2\cdot(1+2t) + 3\cdot(1+3t) + 1t = 8{,}08$ | umformen nach t $\Rightarrow t = \frac{11}{50} = 0{,}22$

t in g $\quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{11}{50}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}44\\1{,}66\\0{,}22\end{pmatrix} \Rightarrow F(1{,}44 | 1{,}66 | 0{,}22)$

3. Betrag des Vektors $\overrightarrow{FR}$ $\quad F(1{,}44 | 1{,}66 | 0{,}22)$ $\quad R(1|2|0{,}08)$

$|\overrightarrow{FR}| = \left|\begin{pmatrix}-0{,}44\\0{,}34\\-0{,}14\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-0{,}44)^2 + (0{,}34)^2 + (-0{,}14)^2} \approx 0{,}573$

>>> kleinste Entfernung von R zu g: 0,573, also etwa 570m (weil 1LE = 1km)

Abstand eines Punktes von einer Ebene

$R(2|0|1)$ $\quad E: x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 25$

1. Gerade g aufstellen

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix}$

2. Schnittpunkt g und E

$(2+r) + 8\cdot(8r) - 4\cdot(1-4r) = 25$ | umformen nach r $\Rightarrow r = \frac{1}{3}$

r in g: $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow F(\frac{7}{3} | \frac{8}{3} | -\frac{1}{3}) \rightarrow$ Lotfußpunkt

3. Betrag des Vektors $\overrightarrow{RF}$

$|\overrightarrow{RF}| = 3$

>>> Abstand von R zu E: 3LE

Hesse'sche Normalenform

Ebenengleichung der Form $E: (\vec{x} - \vec{p})\cdot\vec{n}_0 = 0$ heißt Hesse'sche Normalenform

Für den Abstand eines Punktes $R(r_1/r_2/r_3)$ von der Ebene E gilt: $d = |(\vec{r} - \vec{p})\cdot n_0|$

Ist $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ eine Koordinatengleichung der Ebene E, so gilt:

$$d = \frac{ar_1 + br_2 + cr_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Zahl im Nenner neg. → Punkt unterhalb Ebene
pos. → Punkt oberhalb

Beispiel:

$E: 4x_1 - 3x_3 - 5 = 0$

$P(1|2|3)$

$d = \left|\frac{4\cdot 1 - 3\cdot 3 - 5}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}\right| = \frac{10}{5}$

$= 2$ LE

Abstand windschiefer Geraden

gegeben: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Lotfußpunkte:

$L_1(s \,/\, -1-s \,/\, 1)$ $\quad L_2(9+2t \,/\, -8-3t \,/\, 6+2t)$

→ 3 Zeilen von g $\quad$ → 3 Zeilen von h

2. Hilfsvektor: (mit Lotfußpunkten)

$$\overrightarrow{L_1L_2} = \begin{pmatrix} 9+2t-s \\ -8-3t-(-1)-s \\ 6+2t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s+2t+9 \\ s-3t-7 \\ 2t+5 \end{pmatrix}$$

3. Skalarprodukt: (von beiden Richtungsvektoren mit Hilfsvektor)

$$(1) \begin{pmatrix} -s+2t+9 \\ s-3t-7 \\ 2t+5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad (2) \begin{pmatrix} -s+2t+9 \\ s-3t-7 \\ 2t+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$(1)\quad -2s + 5t = -16$ $\qquad (2)\quad -5s + 17t = -49$

4. LGS lösen: (nach s und t)

CAS liefert. $s = 3 \wedge t = -2$

$> L_1(3 \,/\, -4 \,/\, 1)$ $\quad L_2(5 \,/\, -2 \,/\, 2)$

5. Betrag:

$$d(g;h) = |\overrightarrow{L_1L_2}| = \sqrt{(5-3)^2 + (-2-(-4))^2 + (2-1)^2} = 3$$

Spiegelpunkt

$E: 2x_1 + x_2 - x_3 + 3 = 0$ $\qquad P(1/1/0)$

1. Gerade (Lotgerade)

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Mittelpunkt (Zeilen von $g: \vec{x}$ in $M(m_1/m_2/m_3)$

$M(1+2r \,/\, 1+r \,/\, -1r)$

3. M in Ebene

$2(1+2r) + (1+r) - (-1r) + 3 = 0$ $\quad$ | umformen nach r $\qquad$ r in M: $M(-1/0/1)$

$\hookrightarrow r = -1$

4. Vektorkette, um P′ zu bestimmen

$P' = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PM}$ $\quad \overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad P' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow P'(-3/-1/2)$

Schnittwinkel

zwischen 2 Vektoren:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

zwischen Geraden g_1 und g_2:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Richtungsvektoren

zwischen Ebenen E_1 und E_2:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$$

$0° < \alpha < 90°$

Normalenvektoren

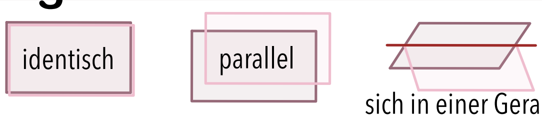
zwischen Gerade g_1 und Ebene E_1:

$$\cos(90° - \alpha) \,/\, \sin(\alpha) = \frac{\vec{u_1} \cdot \vec{n_1}}{|\vec{u_1}| \cdot |\vec{n_1}|}$$

$0° < \alpha < 90°$

Richtungsvektor g · $\vec{n}$ von E

Lage einer Ebene zu einer anderen Ebene



sich in einer Gerade schneiden

Vorgehen bei Prüfung auf Parallelität, Identität und Schnitt:

Fall 1: beide Ebenen sind in Koordinatenform gegeben

$$\begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \end{vmatrix}$$

lösen → keine Lösung: parallel, nach Umformung 2 identische Gleichungen: identisch, als Lösungsmenge Parameterform mit 1 Parameter: Gerade

Fall 2: einen Ebene in Koordinatenform, eine in Parameterform

einsetzen → falsche Aussage: parallel, wahre Aussage: identisch

Schnittgerade

$E: x_1 + x_2 + 2x_3 - 8 = 0$ $\quad$ 1 KF

$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ 1 PF

F in E: $(4+2s) + (-3s) + 2 \cdot (t) - 8 = 0$

$2t - 4 = s$

s in Parameterform:

x_1: $4 + (2t-4) \cdot 2 = -4 + 4t$

x_2: $(2t-4) \cdot (-3) = 12 - 6t$

x_3: $t = 0 + 1t$

$\hookrightarrow s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Stochastik

Der Ereignisraum

Am Beispiel: Ω = Pizza A = Käse B = Oliven

Ω (Omega) = Ereignisraum = beinhaltet alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments
Die einzelnen Teilmengen des Ereignisraums Ω heißen Ereignisse (A, B, ...).
Man schreibt für Ereignisse A und B aus Ω: $A \subseteq \Omega$ und $B \subseteq \Omega$ ($\subseteq$ = Teilmenge)

$\Omega \setminus A$	= Pizza ohne Käse	Omega ohne A
$A \wedge B$	= Pizza mit Käse und Oliven	A und B
$A \vee B$	= Pizza mit einem oder beidem	A oder B (oder beides)
$A \setminus B$	= Pizza mit Käse, ohne Oliven	A ohne B
$(A \vee B) \setminus (A \wedge B)$	= Pizza mit Käse oder Oliven (nicht beides)	nur A oder B (nicht beides)
$\bar{A} \wedge \bar{B}$	= Pizza mit allem außer Käse / Oliven	alles außer A oder B
$\bar{A} \vee \bar{B}$	= Pizza ohne Käse und Oliven	alles außer A und B

Wahrscheinlichkeiten

- Gegenwahrscheinlichkeit: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

- Additionssatz: $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$

- Allgemeine Herangehensweise bei Stochastik-Aufgaben:

Beispiel: An einer Schule haben 20% der Schüler eine Laktoseintoleranz. 10% der Schüler haben eine Glukose-Unverträglichkeit. 25% haben mindestens eine der beiden Unverträglichkeiten. Bestimmte die Wahrscheinlichkeit, das jemand beides hat.

1. Schritt: Ereignisse benennen

L := Lactoseintoleranz G := Glucoseintoleranz

2. Schritt: Was ist gegeben?

$P(L) = 0{,}2$ (20%) $P(G) = 0{,}1$ (10%) $P(L \vee G) = 0{,}25$ (25%) mind. 1 ≙ oder

3. Schritt: Was ist gesucht?

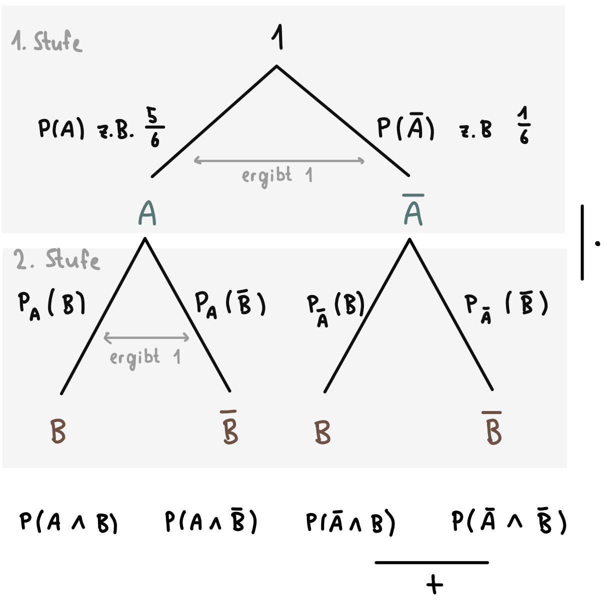
$P(L \wedge G)$ → Wahrscheinlichkeit von Lactose- und Glucoseunverträglichkeit

$$
\begin{aligned}
\rightarrow\ P(L \vee G) &= P(L) + P(G) - P(L \wedge G) && \rightarrow \text{Additionssatz} \\
0{,}25 &= 0{,}2 + 0{,}1 - P(L \wedge G) \\
0{,}25 &= 0{,}3 - P(L \wedge G) && \mid -0{,}3 \\
-0{,}05 &= -P(L \wedge G) && \mid : (-1) \\
0{,}05 &= P(L \wedge G)
\end{aligned}
$$

⇒ 5% beides

Baumdiagramm

> Veranschaulichung



Im Baum zu finden:

$P(A)$ → Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt

$P(A \wedge B)$ → A und B treten ein

$P_A(B)$ → B tritt unter der Bedingung ein, dass A bereits eingetreten ist

Regeln

1. Pfadregel (Produktregel): entlang des Zweigs wird multipliziert

2. Pfadregel (Summenregel): mehrere Zweige / Wahrscheinlichkeiten werden addiert

Zufallsgrößen

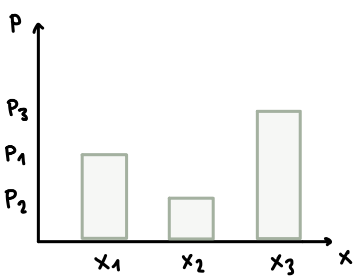
Zufallsgröße X:
- ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine (reelle) Zahl zu
- wie oft jede Zahl vorkommt wird durch die Verteilung beschrieben
- diese kann unterschiedlich festgehalten werden

tabellarisch (Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X):

X	x_1	x_2	...	x_n
$P(x = X)$	P_1	P_2	...	P_n

← Wie oft liegt Zahl vor? / Ergebnisse
← Verteilung / zugehörige Wahrscheinlichkeiten

Stabdiagramm / Histogramm:



Normierungsbedingung: Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten (P) einer Verteilung muss immer 1 ergeben.

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

Mittelwert / arithmetisches Mittel:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{\text{Summe aller Werte}}{\text{Anzahl aller Werte}}$$

Median: → mittlere Zahl

~~1 1 1~~ 2 2 3 ~~4 4 6~~ → alle Werte der Größe nach sortieren

Erwartungswert: gibt an, welcher Mittelwert (⌀) bei Wiederholung (gr. Anzahl) zu erwarten ist

$$\mu = (x_1 \cdot p_1) + (x_2 \cdot p_2) + \dots + (x_n \cdot p_n)$$

Standardabweichung: um wie viel weicht μ durchschnittlich ab

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu) \cdot p_1 + \dots + (x_n - \mu) \cdot p_n}$$

Absolute und relative Häufigkeit

Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
- Anzahl / ganze Zahl (0; 1; 2; …) - z.B. Würfel: gibt an, wie oft welche Zahl gewürfelt wurde	- in Prozent / Prozentzahl (0,2 / 20%) - man erhält sie, indem man die absolute Häufigkeit durch die Versuche n teilt ($\frac{3}{10}$)

Laplace - Ereignisse (faires Spiel)

Ein Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse aus Ω gleich wahrscheinlich sind, wird Laplace-Experiment genannt.

Laplace = fair

Faires Spiel:
Ein Spiel wird fair genannt, wenn Gewinne und Verluste ausgeglichen sind - das heißt, dass der Erwartungswert für einen Gewinn 0 sein muss.

Erwartungswert = 0

Beispiel: Einsatz = e $\quad x_n$ = Auszahlung

X	0 - e	4 - e	10 - e
P (X = k)	$\frac{200}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Ansatz: Erwartungswert = 0

$$(0-e)\cdot\frac{200}{216} + (4-e)\cdot\frac{15}{216} + (10-e)\cdot\frac{1}{216} = 0$$

$$-\frac{200}{216}e + \frac{60}{216} - \frac{15}{216}e + \frac{10}{216} - \frac{1}{216}e = 0$$

$$-e + \frac{70}{216} = 0 \quad | + e$$

$$\frac{70}{216} \approx 0{,}32 = e$$

$\Rightarrow$ Bei einem Einsatz von 0,32 € wäre das Spiel fair.

Daten darstellen und durch Kenngrößen beschreiben - Mittelwert und Standardabweichung

Urliste $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ zugehörige Kenngrößen sind:

Mittelwert: $\bar{x} = \frac{1}{n}\cdot(x_1 + .. + x_n)$ empirische Standardabweichung $s = \sqrt{\frac{1}{n}\cdot((x_1-\bar{x})^2 + \ldots + (x_n-\bar{x})^2}$

rel. Häufigkeitsverteilung mit Werten $m_1, \ldots m_k$ und rel. Häufigkeiten $h_1, \ldots, h_k$, so gilt:

$\bar{x} \approx m_1 \cdot h_1 + \ldots + m_k \cdot h_k$ $\quad s \approx \sqrt{(m_1-\bar{x})^2 \cdot h_1 + \ldots + (m_k-\bar{x})^2 \cdot h_k)}$

bei Messungen: Standardabweichung $\hat{=}$ Messungenauigkeit

Erwartungswert und Standardabweichung von Zufallsgrößen

Erwartungswert μ (Mü)   Standardabweichung σ (Sigma)   Zufallsgröße X

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X in Tabelle:

g	-1	0	2	5
$P(X=g)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

$$\mu(X) = (-1) \cdot \frac{27}{64} + 0 \cdot \frac{27}{64} + 2 \cdot \frac{9}{64} + 5 \cdot \frac{1}{64} = -\frac{1}{16} = -0{,}06$$

→ bei dem Spiel wird man auf lange Sicht etwa 6 ct verlieren

⇒ μ gibt an, welcher Wert durchschnittlich bei einer großen Zahl von Durchführungen des Zufallsexperiments zu erwarten ist (Prognose für den Mittelwert)

$$\sigma(X) = \sqrt{\left((-1) - \left(-\frac{1}{16}\right)\right)^2 \cdot \frac{27}{64} + \left(0 - \left(-\frac{1}{16}\right)\right)^2 \cdot \frac{27}{64} + \left(2 - \left(-\frac{1}{16}\right)\right)^2 \cdot \frac{9}{64} + \left(5 - \left(-\frac{1}{16}\right)\right)^2 \cdot \frac{1}{64}}$$

Erwartungswert von X:

$$\mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + x_3 \cdot P(X = x_3) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

Standardabweichung von X:

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)}$$

bei binomialverteilter Zufallsgröße: $\mu = n \cdot p$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Bernoulli-Experimente, Binomialverteilung

Ziehen mit Zurücklegen - Trefferwahrscheinlichkeit bleibt konstant

- Bernoulli-Kette der Länge n besteht aus n unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit den Ergebnissen 1 („Treffer") und 0 („Niete")
- die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung B heißt Binomialverteilung, die Zufallsgrößen X heißt binomialverteilt mit den Parametern n und p

Beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Treffer und ist p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer, so erhält man die Wahrscheinlichkeit für r Treffer mithilfe der Bernoulli-Formel:

$$B_{n;p}(r) = P(X=r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r} \qquad r = 0, \ldots, n$$

Bernoulli-Experiment: es gibt nur 2 Möglichkeiten und diese sind unabhängig voneinander

Kombinatorik / Binomialkoeffizient berechnen: CAS nCr

n über r

$$\binom{n}{r} = \frac{(n)!}{(r)! \cdot (n-r)!}$$

! Fakultät

z.B. $\binom{12}{7} = \frac{12!}{7! \cdot 5!}$

n → Anzahl Versuche

r → wann du gewinnst

$\binom{n}{0}$ $\binom{3}{0}$ über 0 immer 1 & $\binom{n}{n}$ $\binom{3}{3}$ 1

Beispiel:

Binomialverteilung für $n = 3$ und $p = \frac{1}{3}$

$$B_{3,\frac{1}{3}} = P(X=1) = 3 \cdot \frac{1}{3}^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-1} = 0{,}44$$

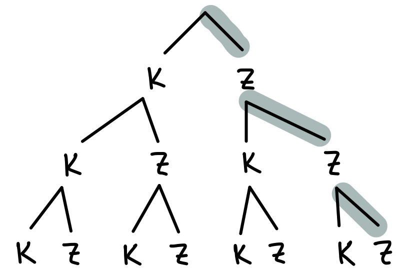
CAS binomCdf$(3, \frac{1}{3}, 1, 1)$

Pascal-Dreieck

> zur Berechnung des Binomialkoeffizienten

Baum für Bernoulli-Kette der Länge n = 3

K = Kopf   Z = Zahl



$\binom{3}{r}$ für $r = 0; 1; 2; 3$

$\binom{3}{0} = 1$ bei 3 Versuchen 0 × Kopf
↳ 1 Pfad

$\binom{3}{1} = 3$ $\binom{3}{2} = 3$ $\binom{3}{3} = 1$

Pascal-Dreieck

n Versuch						
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1
Treffer r	0	1	2	3	4	5

Summe 2 obere

↳ $\binom{3}{2} = 3$

Beispielaufgabe: Begründen Sie durch eine Termumformung. $\binom{8}{3} = \binom{7}{2} + \binom{7}{3}$

$$\frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} + \frac{7!}{3! \cdot 4!}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{5}\ \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} + \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5\ \cancel{4}\ \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3}\cancel{2}\ 1 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}\ \cancel{2} \cdot \cancel{1}}$$

$$\frac{8 \cdot 7}{1} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} + \frac{7 \cdot 5}{1} \longrightarrow \frac{56}{1} = \frac{42}{2} + \frac{35}{1}$$

$$56 = 21 + 35 \longrightarrow 56 = 56$$

Praxis der Binomialverteilung

Bei einer binomialverteilten Zufallsgröße X kann man alle Berechnungen mit zwei Grundfunktionen durchführen.

a) Die erste Funktion berechnet zur Trefferzahl r die Wahrscheinlichkeit $P(X = r) = B_{n;p}(r)$

b) Die zweite Funktion berechnet die kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(X \le r)$, also die Summe
$P(X=0) + \ldots + P(X=r) = F_{n,p}(r)$

CAS $P(X=4)$, $P(X \le 4)$, $P(X \ge 3)$ und $P(X \le 1$ oder $X \ge 5)$ für Zufallsgröße X mit $n = 50$ und $p = 0{,}05$ berechnen

untere / obere Schranke

$P(X=4)$ US: 4 OS: 4 binomCdf(50, 0.05, 4, 4) ≈ 0,136 ≈ 13,6 %

$P(X \le 4)$ US: 0 OS: 4 binomCdf(50, 0.05, 0, 4) $P(X \ge 3)$ binomCdf(50, 0.05, 3, 50) n

$P(X \le 1$ od. $X \ge 5) \rightarrow 1 - P(2 \le x \le 4)$ od. $P(0 \le x \le 1) + P(5 \le x \le 50)$

Sigmaregeln

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern n und p, dem Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ erhält man folgende Näherungen:

1σ, 2σ, 3σ - Regel:

1. $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) \approx 68{,}3\,\%$
2. $P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\,\%$
3. $P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\,\%$

bzw. für „glatte" Wahrscheinlichkeiten:

$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90\,\% \rightarrow \sigma = 1{,}64$

$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 95\,\%$

$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 99\,\%$

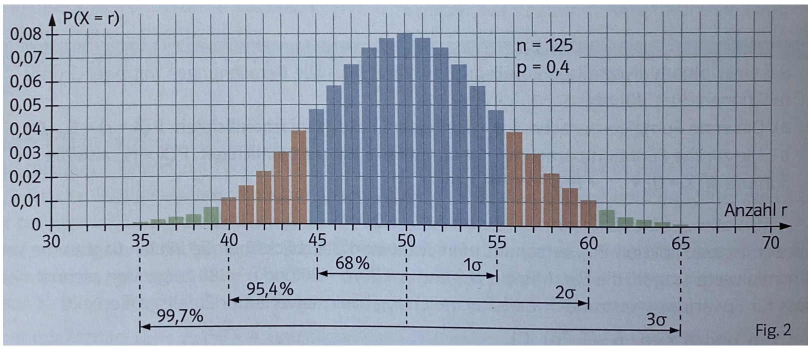


Fig. 2

Problemlösen mit der Binomialverteilung (p / n gesucht)

p gesucht: $p = 1 - \sqrt[n]{1 - P}$

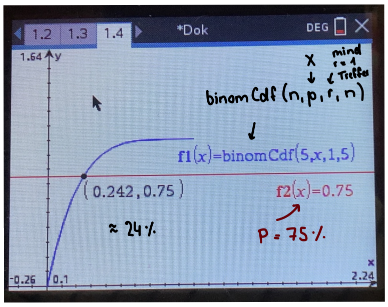
es wird häufig gefragt nach: Wahrscheinlichkeit, Anteil, Prozent

Beispiel: Wie groß müsste der Anteil der Vegetarier mindestens sein, damit sich unter 5 Personen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens 1 Vegetarier befindet?

$P = 90\,\% = 0{,}9$ $\qquad n = 5$

$p = 1 - \sqrt[5]{1 - 0{,}9} \approx 0{,}369$

$\rightarrow$ Anteil Vegetarier mind. 36,9 %



Graph binomCdf x für p

Graph P als f(x)

SP bestimmen

$\rightarrow$ 24%, dass man bei 5 Würfen mind. 1 x trifft

n gesucht: $n = \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$

es wird häufig gefragt nach: Anzahl, Häufigkeit, Personen, Möglichkeiten

Beispiel: Der Anteil der Vegetarier in Deutschland liegt bei 20%. Wie viele Personen müsste man an deiner Schule mindestens befragen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98% einen Vegetarier anzutreffen?

$P = 98\,\% = 0{,}98$ $\qquad p = 20\,\% = 0{,}2$

$n = \frac{\ln(1 - 0{,}98)}{\ln(1 - 0{,}2)} = 17{,}5314 \leftarrow$ hoch runden

$\rightarrow$ mind. 18 Schüler befragen

$\rightarrow$ gleiches Vorgehen, nur x für n

Zweiseitiger Signifikanztest

1. Nullhypothese bestimmen

$H_0 = p$ → z.B. bei Laplace-Würfel $H_0 = \frac{1}{6}$ v $H_1 \neq \frac{1}{6}$

2. Stichprobenlänge: n

meistens 100 oder 200 → erkennt man im Text

3. Signifikanzniveau α festlegen

Fehler-/Irrtumswahrscheinlichkeit, meist 5% → Text

4. Annahmebereich festlegen

α = erste Zahl, die die kumulierte Wahrscheinlichkeit von $\frac{\alpha}{2}$ (meist 2,5%) überschreitet

b = erste Zahl, bei der die kumulierte Wahrscheinlichkeit von $100 - \frac{\alpha}{2}$ (meist 97,5%) überschreitet

CAS Vorgehen

- binomCdf (n, p, x) zeichnen
- ctrl + t → Tabelle
- X suchen, für welches $\frac{\alpha}{2}$ das erste Mal überschritten wird (meist 2,5%, also 0,025 ...) → α
- das X suchen, für welches $100 - \frac{\alpha}{2}$ überschritten wird (meist 97,5%, also 0,975 ...) → b

Beispiel: Laplace-Würfel

$P(X \leq k) = \text{binomCdf}(100, \frac{1}{6}, x)$

CAS:				
	9	0,0212 ...	23	0,9621 ...
	10	0,0426 ...	24	0,9782 ...

Annahmebereich für Nullhypothese: $H_0: p = \frac{1}{6}$

$A = [10; 24]$

→ H_0 wird angenommen, wenn das Stichprobenergebnis im Annahmebereich liegt, sonst wird H_0 verworfen

Einseitiger Signifikanztest

1. Man legt den Stichprobenumfang n und das Signifikanzniveau α (die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit, z.B. α = 5%) fest.

2. Als Testgröße X verwendet man die Trefferzahl.

3.

Linksseitiger Test	Rechtsseitiger Test
Nullhypothese: $H_0: p = p_0$ oder $p \geq p_0$ Alternative: $H_1: p < p_0$	Nullhypothese: $H_0: p = p_0$ oder $p \leq p_0$ Alternative: $H_1: p > p_0$
Man bestimmt den Annahmebereich [a; n] der Nullhypothese. Dazu sucht man aus der Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten von X die kleinste Zahl a heraus, sodass $P(X \leq a) > 5\%$	Man bestimmt den Annahmebereich [0; b] der Nullhypothese. Dazu sucht man aus der Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten von X die kleinste Zahl b heraus, sodass $P(X \leq b) > 95\%$

4. Man erhebt oder zieht eine Stichprobe vom Umfang n. H_0 wird beibehalten, wenn die Trefferzahl X im Annahmebereich liegt, sonst wird H_0 verworfen.

linksseitiger Test: „mindestens" $H_0: p \geq p_0$ | rechtsseitiger Test: „höchstens" $H_0: p \leq p_0$

Fehler beim Testen von Hypothesen

Fehler 1. Art: Nullhypothese wird verworfen, obwohl sie eigentlich richtig ist

1 - binomCdf (n, p, Annahmebereich)

Fehler 2. Art: Nullhypothese wird akzeptiert/angenommen, obwohl sie nicht stimmt

binomCdf (n, p, Annahmebereich)

Signifikanz und Relevanz: Ergebnisse statistischer Tests kritisch hinterfragen

- Es ist unzulässig, aus mehreren Datenerhebungen im Nachhinein eine mit signifikantem Ergebnis auszuwählen.
- Es kann, im Hinblick auf signifikante Ergebnisse sinnlos sein, den Stichprobenumfang n so groß zu wählen, dass selbst kleinste Unterschiede nachweisbar werden, die völlig irrelevant sind.

Stetige Zufallsgrößen - Integrale besuchen die Stochastik

Eine Funktion f heißt Wahrscheinlichkeitsdichte über einem Intervall I, z.B. I=[a; b] oder I=(a; b), wenn gilt:
(1) $f(x) \geq 0$ für alle x aus I und
(2) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$
Eine reellwertige Zufallsgrößen X mit Werten im Intervall I heißt stetig verteilt mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f, wenn für alle r, s aus I gilt: $P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x)\,dx$

Eine Zufallsgröße X mit den Werten zwischen a und b und der Wahrscheinlichkeitsdichte f besitzt den:

Erwartungswert: $\mu = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$ und die

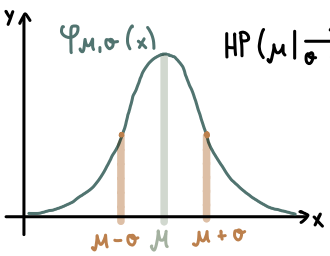
Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx}$

Normalverteilung

normCdf

Eine stetige Zufallsgröße X heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ, wenn sie eine Gauß'sche Glockenfunktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ als Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt.

Eigenschaften der Gauß'schen Glockenkurve:



$HP\left(\mu \,\middle|\, \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\right)$ $WP\left(\mu \pm \sigma \,\middle|\, \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}}\right)$

Es gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = 1$

$\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\longrightarrow$ für $\mu = 0 \wedge \sigma = 1$ $\varphi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

Bei normalverteilten Zufallsgrößen gelten die Sigmaregeln exakt.

Wahrscheinlichkeiten:

Wahrscheinlichkeitsdichte:
$\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Es gilt:
$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx = \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \varphi_{0;1}(x)\,dx$

Satz von de Moivre-Laplace:

Für binomialverteilte Zufallsgrößen X mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ gilt:
a) $P(X = k) = B_{n;p}(k) \approx \varphi_{\mu;\sigma}(k)$ und
b) $P(a \leq X \leq b) \approx \int_{a-0,5}^{b+0,5} \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$