Kombinatorik

Produktregel

Ein Würfel wird 3 mal geworfen. Bestimme die Anzahl der möglichen Ergebnisse.

Anzahl Ergebnisse $= 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$

Bsp. Zoé sucht sich vor der Schule ein Outfit aus. Sie hat 5 Paar Schuhe, 20 Hosen bzw. Röcke und 100 Oberteile zur Verfügung. Wie viele mögliche Outfits stehen zur Wahl?

Anzahl $= 5 \cdot 20 \cdot 100 = 10\,000$

> **Produktregel:** Um die Anzahl der Möglichkeiten zur Kombinatorik verschiedener Merkmale zu bestimmen, multipliziert man die Anzahl der Varianten pro Merkmal.
>
> Anzahl $= n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots$

Bsp. Timo möchte sich ein Auto kaufen. Er hat 7 Marken zur Auswahl, die je 15 Farben haben. Aus wie vielen Möglichkeiten kann er wählen?

Anzahl $= 7 \cdot 10 \cdot 15 = 1050$

Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

Bsp. Im Sportunterricht wird ein Coopertest gemacht. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wie die ersten drei Plätze verteilt sind? (23 Schüler)

$n = 23 \cdot 22 \cdot 21 = 10626$

Bsp. Der Ordnungsdienst wird in zufälliger Reihenfolge für das Schuljahr eingeteilt. (20 Schüler) Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten für die ersten beiden Wochen. Wie viel bei den ersten fünf Wochen?

$n_1 = 20 \cdot 19 = 380$

$n_2 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1860\ 480$

> **Fakultät**
>
> $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
>
> Die Fakultät einer ganzen Zahl, ist das Produkt aller absteigenden Zahlen ab der Zahl.

Bsp. 100 Menschen bilden eine Schlange. Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten wie die ersten 30 Menschen verteilt sind.

$n = 100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 71 \qquad n = \frac{100!}{70!} \qquad \frac{100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot \cancel{71} \cdot \cancel{70} \cdot \cancel{69} \cdot \cancel{\ldots} \cdot \cancel{1}}{\cancel{70} \cdot \cancel{69} \cdot \cancel{\ldots} \cdot \cancel{1}}$

> Beim Ziehen von k Elementen aus n Möglichkeiten ohne zurücklegen, mit Reihenfolge gilt: Anzahl der Möglichkeiten
>
> Anzahl $= \frac{n!}{(n-k)!}$

Bsp. Bei einem Triathlon nehmen 30 Läufer teil. Die ersten 10 Läufer bekommen je nach Platzierung Preisgelder. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten wie die Preisgelder verteilt werden.

$$\text{Anzahl} = \frac{30!}{(30-10)!} = \frac{30!}{20!} = 1{,}1 \cdot 10^{14} = 110 \text{ Billionen}$$

Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Beim Ziehen von k Elementen aus n Möglichkeiten ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge gibt es folgende Anzahl an Möglichkeiten

$$\text{Anzahl} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

„n über k"

Bsp. $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

Bsp. $\binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

Bsp. Henrik spielt Lotto (6 aus 49). Er gibt einen Tipp ab. Berechne die WS, dass er 6 Richtige hat. (ohne Zurücklegen; ohne Reihenfolge)

Anzahl Möglichkeiten: $\binom{49}{6} = 13.983.816$

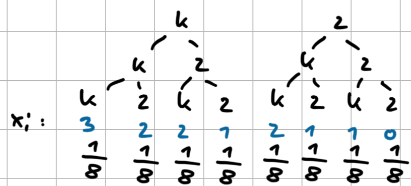
$P(\text{Henrik gewinnt}) = \frac{1}{14 \text{ Mio}}$

Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable (ZV) X nimmt vom Zufall abhängige reelle Werte an.

Bsp. ZE: Eine Münze wird 3 mal geworfen. Die ZV X gibt an, wie oft Kopf erscheint. Welche Werte kann X annehmen?

X kann die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen.



Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine Tabelle (bzw. Funktion) die allen Werten einer ZV eine WS zuordnet heißt <u>Wahrscheinlichkeitsverteilung</u>.

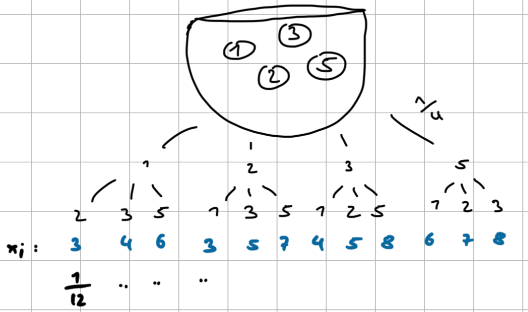
Bsp.

Werte, die die ZV annehmen: x_i	0	1	2	3
WS, dass die ZV die Werte annimmt: $P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Wichtige Eigenschaften

- die Summe aller WS ergibt 1. $(P(X=x_1) + P(X=x_2) + \dots + P(X=x_n) = 1)$
- Additivität: $P(X=x_1 \cup x_2) = P(X=x_1) + P(X=x_2)$
- $P(X=x_i) \in [0;1]$

Bsp. ZE: In einer Urne sind 4 Kugeln. Es werden zwei Kugeln gezogen. Die ZV X gibt die Summe der Kugeln an.
Bestimme die WS-Verteilung.



x_i	3	4	5	6	7	8
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Bsp. Bestimme die WS-V.

Spiel: Für 1€ darf man zweimal würfel. Bei einem Pasch bekommt man 5 €, sonst nichts.

ZV X gibt den Gewinn an.

x_i	-1	4
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Erwartungswert

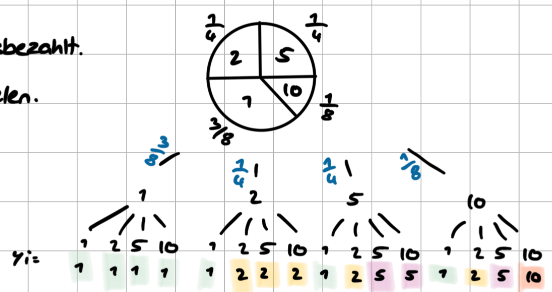
x_i	-1	4
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = -1 \cdot \frac{5}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

Gewinn „im Schnitt": 1 von 6 Spielen → +4
Verlust im Schnitt: 5 von 6 Spielen → -5
} -1 € in 6 Spielen → $-\frac{1}{6}$ € pro Spiel

> Der Erwartungswert E(X) einer ZV X gibt an, welchen Wert die ZV im Schnitt annimmt.
> $$E(X) = x_1 \cdot P(X=x_1) + x_2 \cdot P(X=x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X=x_n)$$

Bsp. Auf dem Jahrmarkt wird folgendes Spiel angeboten:
Das Glücksrad wird zweimal gedreht und die kleinere Zahl ausbezahlt.
Das Spiel kostet 2,50 €. Überprüfe ob es sich lohnt mit zu spielen.



X = Gewinn

x_i	-1,50	-0,50	2,50	7,50
$P(X=x_i)$	$\frac{39}{64}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$

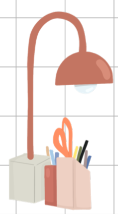
Y = Auszahlung

y_i	1	2	5	10
$P(Y=y_i)$	$\frac{39}{64}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{39}{64} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{8} + 10 \cdot \frac{1}{64}$$
$$= \frac{121}{64} \mathrel{\hat{=}} 1{,}89 €$$
$$E(X) = -0{,}61 €$$

Bsp. Spiel 1: Eine Münze wird einmal geworfen.

Bei Kopf bekommt man 1€. Bei Zahl muss man 1€ zahlen.



x_i	-1	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(X) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$

Spiel 2: Bei Kopf bekommt man 1000 €, bei Zahl muss man 1000 € zahlen.

x_i	1000	-1000
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(X) = 1000 \cdot \frac{1}{2} + (-1000) \cdot \frac{1}{2} = 0$

Varianz / Standartabweichung

Die Varianz (bzw. Standartabw.) ist eine Größe für die „Streuung" der Wert einer ZV an den EW.

$Var(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_n - E(X))^2 \cdot P(X = x_n)$

Bsp. Gegeben ist die WS-V einer ZV X. Berechne die Variana.

a)

x_i	-1	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(X) = 0$

$Var(X) = (-1-0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (1-0)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

b)

x_i	-1000	1000
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(X) = 0$

$Var(X) = (-1000-0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (1000-0)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1\,000\,000$

Bsp.

x_i	-2	1	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

$E(X) = -2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 1,75$

$Var(X) = (-2-1,75)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1-1,75)^2 \cdot \frac{1}{4} + (4-1,75)^2 \cdot \frac{1}{2} = 6,19$

Binomialverteilung

Bernoulli - Experiment

Ein Bernoulliexperiment ist ein ZE, das genau zwei Ergebnisse hat.

Bsp. Münze werfen; würfeln → gerade oder ungerade; ...

Wird ein Bernoulliexperiment mehrmals hinter einander ausgeführt, spricht man von einer Bernoulli-Kette (der Länge n).

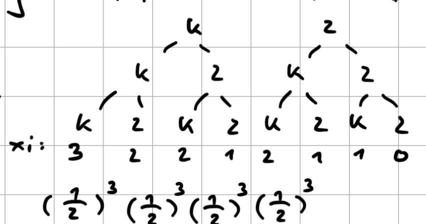
Bsp. dreimal eine Münze werfen; fünf Elfmeter schießen; ...

Wird ein ZV X definiert, die die Anzahl an „Treffen" angibt, heißt die ZV X binomialverteilt.

Bsp. Eine Münze wird dreimal geworfen und notiert, wie oft Kopf erscheint.

Bestimme die WS-Verteilung der ZV X, die die Anzahl an Treffern angibt.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$



Bsp. 15 Versuche; Treffer WS $\frac{1}{4}$; 5 Treffer

$P(X=5) = \binom{15}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 16,5\,\%$

12 Versuche; Treffer WS 0,7; 8 Treffer

$P(X=8) = \binom{12}{8} \cdot 0,7^8 \cdot 0,3^4$

n Versuche; Treffer WS p; k Treffer

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

Formel von Bernoulli

Gegegeben ist eine Bernoullikette der Länge n mit Treffwahrscheinlichkeit p. Die ZUX gibt die Anzahl der Treffen an.
Dann gilt:
$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Eine ZUX, die die Anzahl der Treffer einer Bernoullikette der Länge n mit Treffer WS p angibt, heißt **binomialverteilt**.
Man schreibt: X ist $B_{n;p}$ - verteilt
Die WS, bei einer $B_{n;p}$ -verteilt zu k Treffer zu erziehlen, schreibt man als $B_{n;p}(k)$, also $B_{n;p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Bsp. Im Schnitt haben 5 von 6 Schülern Netflix. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von 3 Schülern genau zwei Netflix haben.

$n=3;\ p=\frac{5}{6}$: X ist $B_{3;\frac{5}{6}}$ - verteilt

$P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 = 3 \cdot \frac{25}{216} = \frac{25}{72}$

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit 20 Schülern mindestens 18 Schüler Netflix haben.

$n=20;\ p=\frac{5}{6}$: X ist $B_{20;\frac{5}{6}}$ -verteilt

$P(X \geq 18) = P(X=18) + P(X=19) + P(X=20) = 0,328$

$P(X=18) = \binom{20}{18} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{18} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0,198$

$P(X=19) = \binom{20}{19} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{19} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 = 0,104$

$P(X=20) = \binom{20}{20} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{20} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 = 0,026$

Binomialverteilung

Eine Schülerin schreibt im Schnitt in jeder zweiten KA besser als 2,0.

Sie schreibt 4 KAs. Die ZUX gibt die Anzahl der Arbeiten an, die Besser als 2,0 sind.

a) Bestimme die WS - Verteilung

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,062

Binomialverteilung mit $n=4$; $p=\frac{1}{2}$

$B_{4;\frac{1}{2}}(0)$ / $P(X=0)=0{,}0625$

$B_{4;\frac{1}{2}}(1)$ / $P(X=1)=0{,}25$

$B_{4;\frac{1}{2}}(2)$ / $P(X=2)=0{,}375$

$B_{4;\frac{1}{2}}(3)$ / $P(X=3)=0{,}25$

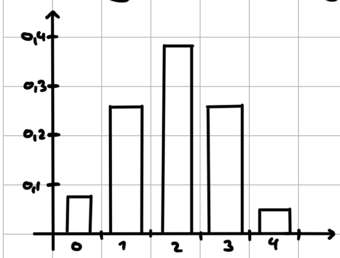
$B_{4;\frac{1}{2}}(4)$ / $P(X=4)=0{,}0625$

b) Bestimme $E(X)$ und $Var(X)$

$E(X)=0\cdot 0{,}0625+1\cdot 0{,}25+2\cdot 0{,}375+3\cdot 0{,}25+4\cdot 0{,}065=2$

$Var(X)=(0-2)^2\cdot 0{,}0625+(1-2)^2\cdot 0{,}25+\ldots=1$

Histogramm: (Säulendiagramm)



Sigma - Intervalle

Unter bestimmten Voraussetzung hat die Binomialverteilung ähnliche Eigenschaften wie die Normalverteilung.

Voraussetzung: $\sigma>3$

Ein fester Anteil an Ergebnissen liegt in den sogenannten „Sigma - Intervallen":

σ - Intervalle: $P(\mu-\sigma\leq X\leq+\sigma)\approx 68\,\%$

2σ - Intervalle: $P(\mu-2\sigma\leq X\leq+2\sigma)\approx 95{,}5\,\%$

3σ - Intervalle: $P(\mu-3\sigma\leq X\leq+3\sigma)\approx 99{,}7\,\%$

($\mu\,\hat{=}$ Erwartungswert, $\sigma\,\hat{=}$ Standardabweichung)

Bsp. Die Woerner - Partei hat in Umfragen 37 % der Stimmen bekommen.

In einem Wahlkreis wählen 7000 Menschen.

Berechne die Sigma - Intervalle und interpretiere das Ergebnis.

$n=7000$ $p=37\,\%$

$\mu=7000\cdot 0{,}37=2590$

$\sigma=\sqrt{7000\cdot 0{,}37\cdot 0{,}63}=40{,}4$ (>3, also darf man Sigma - Intervalle anwenden)

1-σ - Intervalle: $P(\underset{\mu-\sigma}{2549{,}6}\leq X\leq\underset{\mu+\sigma}{2630{,}4})\approx 68\,\%$

Die Woerner - Partei kann mit 68 % Sicherheit davon ausgehen, zwischen 2550 und 2630 Stimmen zu bekommen.

2σ - Intervall: $P(2509{,}2\leq X\leq 2670{,}8)\approx 95{,}5\,\%$

Die Woerner - Partei kann mit 95,5 % Sicherheit davon ausgehen, zw. 2510 und 2670 Stimmen zu bekommen.

3σ - Intervall: $P(2468{,}8\leq X\leq 2711{,}2)\approx 99{,}7\,\%$

... zw. 2469 und 2711 ...

Sigma-Intervalle zu häufigen WS:

$P(\mu - 1{,}64 \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90\,\%$

$P(\mu - 1{,}96\,\sigma \le X \le \mu + 1{,}69) \approx 95\,\%$

$P(\mu - 2{,}58\,\sigma \le X \le \mu + 2{,}58) \approx 99\,\%$

Bsp. Bei einer Achterbahn auf den Wasen fährt im Schnitt jeder 20 Besucher mit. Es wird mit 100 000 Besuchern am Tag gerechnet. Eine Fahrt kostet kostet 5 €.
Berechne mit welchen Einnahmen der Betreiber mit 95 % Sicherheit pro Tag rechnen kann.

$n = 100\,000 \quad p = \frac{1}{20}$

$\mu = 100\,000 \cdot \frac{1}{20} = 5000$

$\sigma = \sqrt{100\,000 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20}} = 68{,}92$

95 % Sicherheit: $P(\mu - 1{,}96\,\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\,\sigma) = P(4864{,}9 \le X \le 5135{,}1) \approx 95\,\%$

Der Betreiber kann mit 4865 bis 5138 Gästen rechnen → zw. 24 325 und 25 675 €.

kumulierte WS

Bsp. Ein Würfel wird 100 mal geworfen. Bestimme die WS, dass höchstens 20 mal eine „6" erscheint.

$n = 100 \quad p = \frac{1}{6}$; X ist $B_{100;\frac{1}{6}}$-verteilt

$P(X \le 20) = 0{,}848$

mit WTR
Binom CD

Bestimme die WS für mindestens 15 mal „6"

$P(X \ge 15) = 1 - P(X \le 14) = 1 - 0{,}287 = 0{,}713$

WTR:

$P(X = k)$ → Mode → Dis (4)
→ Binom PD → Liste / Var
Tabelle — ein Wert
→ $x \hat{=} k$; n ; p → Enter

$P(X \le k)$ → Mode → Dis (4) → ⇩
→ Binom CD (1) → List / Var
→ $x = k$; n ; p → Enter

Umschreiben für WTR: (damit nur $P(X \le k)$ vorkommt)

„höchstens k Treffer": $P(X \le k)$

„weniger als k Treffer": $P(X < k) = P(X \le k-1)$

„mindestens k Treffer": $P(X \ge k) = 1 - P(X \le k-1)$

„mehr als k Treffer": $P(X > k) = 1 - P(X \le k)$

„mindestens k und höchstens l Treffer": $P(k \le X \le l) = P(X \le l) - P(X \le k-1)$

„mindestens k und weniger als l Treffer": $P(k \le X < l) = P(X \le l-1) - P(X \le k-1)$

„mehr als k und höchstens l Treffer": $P(k < X \le l) = P(X \le l) - P(X \le k)$

„mehr als k und weniger als l Treffer": $P(k < X < l) = P(X \le l-1) - P(X \le k)$

Bsp. Berechne.

1. $n = 6$; $p = 0{,}4$

a) höchstens 4 Treffer : $P(X \leq 4) = 0{,}959$

b) mehr als 2 Treffer : $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}544 = 0{,}456$

c) mindestens 1 und weniger als 4 : $P(1 \leq X \leq 4) = P(X \leq 3) - P(X \leq 0) = 0{,}765$

d) mehr als 2 und höchstens 5 : $P(2 < X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2) = 0{,}995 - 0{,}544 = 0{,}451$