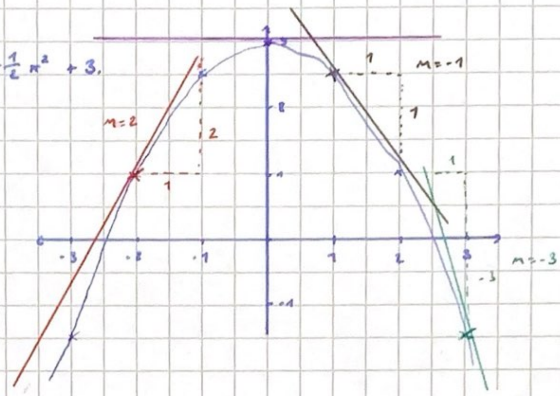
MATHE 11.10.2021

Tangente und Normale:

Bsp. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$.
Bestimme grafisch.

$f'(-2) = 2$
$f'(1) = -1$
$f'(3) = -3$
$f'(0) = 0$



Anleitung: Tangentengleichung aufstellen. Bsp. $f(x) = -x^2 + 3x$ bei $x = 3$

① Ansatzfunktion: $g(x) = mx + b$
② Steigung bestimmen: x in f' einsetzen
Ableiten: $f'(x) = -2x + 3$
x einsetzen: $f'(3) = -2 \cdot 3 + 3 = -3 \rightarrow m = -3$
③ Punkt bestimmen: x in f einsetzen
$f(3) = -3^2 + 3 \cdot 3 = 0 \rightarrow P(3 | 0)$
④ Punkt und Steigung in Ansatzfunktion einsetzen (um b auszurechnen)
$0 = -3 \cdot 3 + b \quad | +9$
$b = 9$
⑤ Lösung hinschreiben: (m und b in ①)
$g(x) = -3x + 9$

Übungen:

① $f(x) = -2x^2 + 4$ bei $x = -1$
② $f(x) = x^3 - 6x + 1$ bei $x = 2$
③ $f(x) = e^{2x} - 2$ bei $x = 0$
④ $f(x) = \sin(x)$ bei $x = 0$
⑤ $f(x) = e^x \cdot x$ bei $x = 0$
⑥ $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$ bei $x = \pi$

1. ① $g(x) = mx + b$
② $f'(x) = 4x$
$f'(-1) = -4 \cdot (-1) = 4 \rightarrow m = 4$
③ $f(-1) = -2 \cdot (-1)^2 + 4 = 2 \rightarrow P(-1 | 2)$
④ $2 = 4 \cdot (-1) + b \quad | +4$
$b = 6$
⑤ $g(x) = 4x + 6$

2. ① $g(x) = mx + b$
② $3x - 6$
$f'(2) = 3 \cdot 2 - 6 = 0 \rightarrow m = 0$
③ $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2 + 1 = 5 \rightarrow P(2 | 5)$
④ $5 = 0 \cdot 2 + b \quad | -0$
$5 = b$
⑤ $g(x) = 0x + b$

3. ① $g(x) = mx + b$
② $2e^{2x}$
$f'(x) =$
$f'(0) = 2e^{20} \rightarrow m = 2$
③ $f(0) = e^{20} - 2 = -1 \rightarrow P(0 | -1)$
④ $-1 = 2 \cdot 0 + b \quad | -2$
$-1 = b$
⑤ $g(x) = 2 \cdot 0 + (-1)$

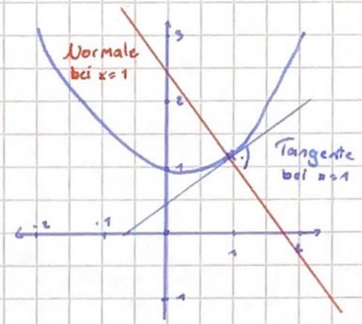
4. ① $g(x) = mx + b$
② $f'(x) = \cos(x)$
$f'(0) = \cos(0) \rightarrow m = 1$
③ $f(0) = \sin(0) = 0 \quad P(0 | 0)$
④ $0 = 1 \cdot 0 + b$
$b = 0$
⑤ $g(x) = 1 \cdot 0 + 0$

13.10.2021

Die Normale ist die Gerade, die senkrecht zur Tangente ist und durch den selben Punkt geht.

Für die Steigung der Normalen gilt:

$m_n = -\frac{1}{m_t}$



Anleitung: Normalengleichung bestimmen $\quad f(x) = -2x^2 + 2x - 1$ bei $x = 1$

① Ansatzfunktion: $g(x) = mx + b$

② Steigung bestimmen:

Ableiten: $f'(x) = -4x + 2$

x in f' einsetzen: $f'(1) = -4 \cdot 1 + 2 = -2 \quad \rightarrow m_t = -2$

Steigung der Normalen: $m_n = -\frac{1}{m_t}$ / $m_n = -\frac{1}{f'(1)} \quad m_n = \frac{1}{2}$

③ Punkt bestimmen:

x in f einsetzen: $f(1) = -2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = -1 \quad \rightarrow P(1/-1)$

④ m und P in Ansatzfunktion einsetzen (um b zu bestimmen)

$-1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + b \quad | -\frac{1}{2}$

$-\frac{3}{2} = b$

⑤ Lösung: $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad$ m und b in Ansatzfunktion einsetzen

Übungen: Normale aufstellen

1. $f(x) = x^3 - 4x + 1$ bei $x = -2$
2. $f(x) = 2e^{-x} + 1$ bei $x = 0$
3. $f(x) = e^{x-2} \cdot x$ bei $x = 2$

1.

① $g(x) = mx + b$

② $f'(x) = 3x^2 - 4$

x in f': $f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8 \quad \rightarrow m_t = 8$

Steigung:

$m_n = -\frac{1}{(8)} \quad m_n = -\frac{1}{8}$

③ $f(-2) = -2^3 - 4 \cdot (-2) + 1 = 1 \quad \rightarrow P(-2 | 1)$

④ $1 = -\frac{1}{8} \cdot (-2) + b \quad | -\frac{1}{4}$

$\frac{3}{4} = b$

⑤ $g(x) = -\frac{1}{8} \quad (-2) + \frac{1}{4}$

Übungen: Ableiten.

1. $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$
2. $f(x) = \sin(2x) + x$
3. $f(x) = \sin(2x) \cdot x$
4. $f(x) = e^x \cdot x^2$

1. $4x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 12x^2 - 3$

2. $f(x) = \sin(2x) + x$

$f'(x) = 2\cos(2x) + 1$

3. $f(x) = \sin(2x) \cdot x$